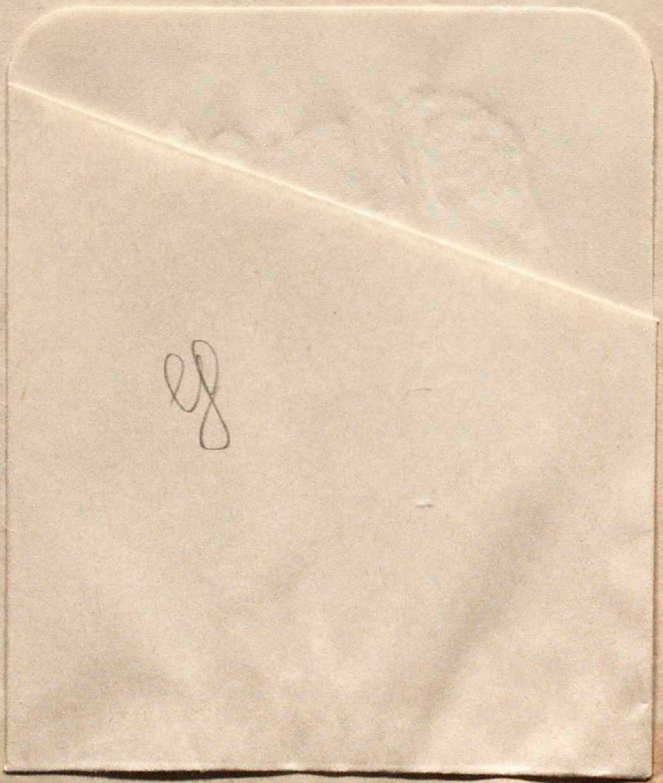
E 86/325

S 86
325



Е 86
6 325

А. СЕРРЕ.

КУРСЪ АРИѲМЕТИКИ,

СЪ НѢКОТОРЫМИ ИЗМѢНЕНІЯМИ

ПЕРЕВЕЛЪ

Н. Юдинъ.

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ.

МОСКВА.
ИЗДАНІЕ БРАТЬЕВЪ САЛАЕВЫХЪ.
1871.

достаточны для начальныхъ вычисленій, довольно распространены и различныя изданія подобныхъ таблицъ дешевы.

Затѣмъ, вся 6-я книга составлена. Она преимущественно мною направлена на изложеніе мѣръ русскихъ, прочія же отодвинуты на второй планъ. Точно также и послѣдняя глава „*Приложенія Ариѳметики къ рѣшенію вопросовъ*“ за исключеніемъ правилъ учета и смѣшенія, приноровлены къ общепринятому у насъ порядку преподаванія тѣхъ статей.

КУРСЪ АРИѲМЕТИКИ.

КНИГА ПЕРВАЯ.

О ЧЕТЫРЕХЪ ДѢЙСТВІЯХЪ.

ГЛАВА I.

НУМЕРАЦІЯ.

Цѣль Ариѳметики. — О нумераціи. — Правило для произношенія числа написаннаго цифрами. — Правило для изображенія числа продиктованнаго.

Цѣль ариѳметики.

1. Если мы разсматриваемъ подобные предметы, и наше вниманіе переносится сначала отъ одного изъ нихъ къ другому поодиначкѣ, а потомъ вообще на всю ихъ совокупность; то мы получаемъ сначала понятіе объ *одномъ* предметѣ, а потомъ понятіе о *нѣсколькихъ* предметахъ.

Слово *единица* мы употребляемъ для обозначенія какого бы то ни было предмета, не обращая вниманія на его природу; подъ словомъ же *число* вообще понимается совокупность нѣсколькихъ единицъ, или сама единица.

Такимъ образомъ, кучи ядеръ, которыя мы видимъ въ арсеналѣ, образуютъ собою число, и тогда каждая куча есть единица; но ядра составляющія кучу точно также образуютъ число, тогда ядро становится единицею.

Когда мы къ какому нибудь числу прибавляемъ единицу, то получаемъ *слѣдующее* число: стало быть числа могутъ продолжаться неограниченно.

Ариѳметика есть наука о числахъ. Она заключаетъ въ себѣ: 1) Производящіяся надъ числами *дѣйствія*, совокупность которыхъ называется *вычисленіемъ*; 2) основныя свойства чиселъ.

О нумераціи.

2. *Нумерація* имѣетъ цѣлью выговаривать и изображать числа.

Изустная нумерація. — Можно, какъ мы увидимъ далѣе, выговаривать всякія числа, до какого угодно предѣла, употребляя слова, служащія для выраженія только нѣкоторыхъ изъ нихъ.

Первыя числа получили названія независимыя одно отъ другаго, они суть:

одинъ, *два*, *три*, *четыре*, *пять*, *шесть*, *семь*, *восемь*, *девять*.

Слѣдующее число, играющее въ нумераціи высшую роль, названо:

десять или *одинъ десятокъ*.

Число образовавшееся отъ соединенія десяти десятковъ, далѣе, число образовавшееся изъ десяти равныхъ предъидущихъ чиселъ и т. д. выговариваются, какъ показываетъ слѣдующая таблица:

сто или *одна сотня*, состоитъ изъ	десяти десятковъ,
тысяча или *единица тысячъ*	десяти сотенъ,
десять тысячъ или *одинъ десятокъ тысячъ* .	десяти единицъ тысячъ.
сто тысячъ или *одна сотня тысячъ*	десяти десятковъ тысячъ,
милліонъ или *единица милліоновъ*	десяти сотенъ тысячъ,
десять милліоновъ или *одинъ десятокъ милліоновъ*.	десяти единицъ милліоновъ,
сто милліоновъ или *сотня милліоновъ*	десяти десятковъ милліоновъ,
биллiонъ *) или *единица биллiоновъ*	десяти сотенъ милліоновъ,
десять биллiоновъ или *десятокъ биллiоновъ*. .	десяти единицъ биллiоновъ,
сто биллiоновъ или *одна сотня биллiоновъ*.	десяти дисятковъ биллiоновъ,
триллiонъ или *единица триллiоновъ*.	десяти сотенъ биллiоновъ,

и т. д.

3. Числа

одинъ, *десять*, *сто*, *тысяча*, *десять тысячъ*, *сто тысячъ*, *милліонъ* и т. д. каждое составлено изъ соединенія десяти равныхъ предъидущихъ чиселъ и часто называются единицами

*) Слово *милліардъ* часто употребляется равносильно съ *биллiономъ*. (Прим. Автора).

2020037695

131442-0

перваго, втораго, третьяго и т. д. *порядка*. Единицы перваго порядка также называются *простыми единицами* *).

Примѣчаніе. — Недостаточно сказать только, что единица какого нибудь порядка содержитъ десять единицъ порядка предъидущаго, но она также содержитъ *сто* единицъ порядка предшествующаго ей двумя мѣстами; *тысячу* — порядка предшествующаго ей тремя мѣстами, и т. д. Напримѣръ, единица шестаго порядка содержитъ десять единицъ пятаго порядка, или десятокъ единицъ пятаго порядка; единица седьмаго порядка будетъ имѣть десять десятковъ, или сотню единицъ пятаго порядка. Очевидно также, что единица восьмаго порядка, содержитъ тысячу единицъ пятаго порядка, и т. д.

4. Теперь и другія числа можно произносить не употребляя новыхъ словъ.

Дѣйствительно, представимъ себѣ какое нибудь число, чѣмъ нибудь превышающее *девять*; десять единицъ въ немъ заключающихся образуютъ одинъ десятокъ; если число оставшихся единицъ опять превышаетъ девять, то можно составить второй десятокъ, и т. д. За тѣмъ могутъ встрѣтиться два случая, или взятое нами число будетъ состоять изъ соединенія нѣсколькихъ десятковъ, или оно будетъ состоять изъ десятковъ и какого нибудь числа единицъ меньшаго или равнаго *девяти*. Точно также число десятковъ, если будетъ превышать *девять*, то образуетъ сотни, которыя могутъ быть соединены съ числомъ десятковъ непревышающимъ *девяти*. Продолжая такъ, мы видимъ, что *всякое число можетъ быть раздѣлено на нѣсколько частей, изъ которыхъ каждая составлена изъ единицъ извѣстнаго порядка въ количествѣ меньшемъ десяти*.

Это положеніе составляетъ основаніе нумераціи, оно даетъ возможность произносить числа, выговаривая послѣдовательно, по скольку единицъ будетъ заключаться въ каждомъ порядкѣ.

*) У насъ до сихъ поръ еще считаютъ иначе. Послѣ порядка *сотенъ милліоновъ*, слѣдующій порядокъ еще не билліонъ, а *тысячи милліоновъ*; далѣе идетъ порядокъ *десятковъ тысячъ милліоновъ*, потомъ *сотенъ тысячъ милліоновъ* и потомъ уже *билліонъ* или тысяча тысячъ милліоновъ. Стало быть, что у насъ билліонъ, то по изложенному, принятому въ Европѣ, счисленію будетъ *трилліонъ*.

(Прим. перев.).

Напримѣръ, число вполнѣ будетъ извѣстно, если мы будемъ знать, что въ немъ заключается:

четыре десятка трилліоновъ, девять сотенъ тысячъ, двѣ единицы тысячъ, семь десятковъ, восемь единицъ.

Мы ограничимся покамѣстъ изложеннымъ, оставляя предстоящія подробности до тѣхъ поръ, пока не будетъ изложена письменная нумерація.

5. *Письменная нумерація.* Основное положеніе, предложенное въ предъидущемъ параграфѣ, даетъ возможность всякія числа изображать только десятью знаками. Эти знаки называются *цифрами.* Изъ нихъ девять называются *цифрами значущими* и изображаютъ девять первыхъ чиселъ. Они суть:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять.

Десятая цифра есть 0, она называется *нулемъ* и указываетъ на отсутствіе единицъ.

6. Чтобы изобразить цифрами какое нибудь число большее девяти, должно, какъ было говорено въ § 4, распредѣлить его на единицы различныхъ порядковъ. Потомъ писать цифру представляюую единицы высшаго порядка; далѣе, съ правой стороны этой цифры, писать ту, которая будетъ представлять число единицъ непосредственно слѣдующаго низшаго порядка, если они заключаются въ данномъ числѣ. Въ противномъ случаѣ пишутъ *нуль.* Если будетъ предложено число состоящее болѣе чѣмъ изъ двухъ порядковъ, то дѣйствуютъ точно также по изложенному правилу. Очевидно, что все дѣло состоитъ въ послѣдовательномъ приписываніи слѣва направо цифръ, представляющихъ единицы различныхъ порядковъ, начиная съ высшаго, находящихся въ числѣ и обозначая нулемъ порядки отсутствующіе.

Примѣръ.—1°. Число состоящее изъ

четырехъ сотенъ, семи десятковъ, восьми единицъ,

пишутъ

478.

2°. Число состоящее изъ

семи десятковъ тысячъ, четырехъ сотенъ, двухъ единицъ,

пишутъ

70402.

3°. Число состоящее изъ

семи десятковъ милліоновъ,

пишутъ

70000000.

Основаніе письменной нумераціи можно выразить такъ:

Всякая цифра, написанная съ лѣвой стороны какой нибудь другой, выражаетъ собою единицы непосредственно высшаго порядка, чѣмъ эта другая.

Примѣчаніе.—Единицы различныхъ порядковъ изображаются такъ:

1, 10, 100, 1000, 100000, и т. д.

7. Легко обнаруживается превосходство письменной нумераціи предъ нумераціей изустной. Дѣйствительно, изобразить всѣ числа можно десятью знаками, тогда какъ выговаривать числа съ ограниченнымъ числомъ словъ можно только до извѣстнаго предѣла.

8. Основанія § 4 и 6, для нумераціи изустной и письменной, составляютъ то, что называется *системою нумераціи*.

Число *десять*, показывающее, сколько единицъ извѣстнаго порядка должны составить единицу слѣдующаго, называется *основаніемъ* системы. Поэтому система, которую мы изложили, называется *десятичною системою*.

Правило для выговариванія числа изображеннаго цифрами.

9. Мы изложили въ предшествовавшемъ основныя начала нумераціи, теперь намъ остается указать на нѣкоторыя подробности.

Первое правило. — *Чтобы выговорить число о двухъ или о трехъ цифрахъ, должно послѣдовательно выговаривать каждую значущую цифру, начиная съ лѣвой стороны, прибавляя названіе единицъ ею представляемыхъ.*

Такимъ образомъ, чтобы выговорить по этому правилу число

478,

говорятъ

четыре сотни, семь десятковъ, восемь единицъ.

10. Нѣкоторыя числа произносятся особеннымъ образомъ, напримѣръ:

два десятка	произносятъ	*двадцать*,
три десятка	. . . . .	*тридцать*,
четыре десятка	. . . . .	*сорокъ*,

пять десятковъ . . . . . пятьдесятъ,
шесть десятковъ . . . . . шестьдесятъ,
семь десятковъ . . . . . семьдесятъ,
восемь десятковъ . . . . . восемьдесятъ,
девять десятковъ . . . . . девяносто;

или вмѣсто:

десять и одинъ произносятъ *одиннадцать,*
десять и два . . . . . двьнадцать,
десять и три . . . . . тринадцать,
десять и четыре . . . . . четырнадцать,
десять и пять . . . . . пятнадцать,
десять и шесть . . . . . шестнадцать,
десять и семь . . . . . семнадцать,
десять и восемь . . . . . восемнадцать,
десять и девять . . . . . девятнадцать;

точно также

двь сотни произносятъ *двьсти,*
три сотни . . . . . триста,
четыре сотни . . . . . четыреста,
пять сотенъ . . . . . пятьсотъ,
шесть сотенъ . . . . . шестьсотъ,
семь сотенъ . . . . . семьсотъ,
восемь сотенъ . . . . . восемьсотъ,
девять сотенъ . . . . . девятьсотъ.

Такимъ образомъ число

215

не произносятъ

двь сотни, десять и пять,

но

двьсти пятнадцать.

Число

973

не произносятъ

девять сотенъ, семь десятковъ и три единицы.

но

девятьсотъ семьдесятъ три.

11. Второе правило. — *Чтобы выговорить число, въ которомъ болье трехъ цифръ, раздьляютъ его отъ правой руки на грани о трехъ цифрахъ. Послдняя слва грань можетъ быть въ одну или въ двь цифры. Потомъ произносятъ отдльно каждую грань, какъ было объяснено, упоминая по окончаніи каждой, къ какому порядку единицъ принадлежитъ ея послдняя цифра.*

Примѣръ. — Число

237405203

произносится

двѣсти тридцать семь милліоновъ, четыреста пять тысячъ, двѣсти три.

12. Такимъ образомъ для произношенія чиселъ, ихъ воображаютъ состоящими изъ различныхъ частей: изъ единицъ *перваго*, *четвертаго*, *седьмаго*, *десятаго* и т. д. порядка; единицы эти слѣдующія:

единицы, *тысячи*, *милліоны*, *билліоны*, *трилліоны* и т. д.,

ихъ называютъ *главными единицами*. Каждая изъ нихъ состоитъ изъ тысячи предшествующихъ.

Примѣчаніе. — Изученіе этихъ главныхъ единицъ имѣетъ второстепенное значеніе. Справедливо, что это облегчаетъ произношеніе чиселъ, но нумераціи, на которой основаны всѣ правила вычисленій, собственно не приноситъ никакой пользы.

Въ дѣйствіяхъ часто приходится разсматривать числа иначе; напримѣръ, разсматриваютъ только единицы и десятки числа, сколько бы ни было въ немъ цифръ, или единицы, десятки и сотни и т. д. Такимъ образомъ число

45728

можно произносить, говоря:

4572 десятка и 8 единицъ,

или

457 сотенъ, 2 десятка, 8 единицъ.

Это прямо вытекаетъ изъ основанія нумераціи. Напримѣръ, въ числѣ 45728, цифра 7 представляетъ единицы третьяго порядка, предшествующія цифры 5 и 4 представляютъ собою, первая десятки, вторая сотни единицъ третьяго порядка; откуда слѣдуетъ, что предложенное число, состоящее изъ 457 единицъ третьяго порядка, будетъ 457 сотенъ.

Правило для изображенія цифрами диктуемаго числа.

13. Число произносимое по предъидущимъ правиламъ изображаютъ послѣдовательнымъ записываніемъ, однихъ за

другими, числъ главныхъ единицъ. При этомъ должно наблюдать, чтобы каждое изъ этихъ чиселъ, начиная со втораго, состояло изъ трехъ порядковъ единицъ, а потому, если въ числѣ только двѣ цифры, то должно съ лѣвой ихъ стороны писать нуль, и два нуля когда цифръ только одна. Точно также, если данное число не будетъ имѣть главныхъ единицъ извѣстнаго порядка, то должно написать три нуля, прежде чѣмъ приступятъ къ изображенію главныхъ единицъ слѣдующаго порядка.

Примѣръ. — Число произносимое такъ:
сто квадрилліоновъ, десять билліоновъ, триста двадцать семь милліоновъ, девять единицъ,
пишутъ

100000010327000009 *).

Упражненія.

1. Выговорить число 123456889.
2. Выговорить число 102003040050600708009.
3. Написать цифрами число: *двадцать семь трилліоновъ, семь билліоновъ, девять тысячъ, триста семь.*
4. Изобразить число: *сто квинтилліоновъ, девять тысячъ, три единицы.*
5. Какое число непосредственно больше числа 3089799?
6. Какое число непосредственно меньше числа 307400?

*) По принятому же у насъ счисленію, это число придется написать такъ:
100.000000.000010.000227.000009.
(Прим. перев.).

ГЛАВА II.

СЛОЖЕНІЕ И ВЫЧИТАНІЕ.

О сложеніи. — Простые случаи сложенія. — Общій случай сложенія. — Повѣрка сложенія. — О вычитаніи. — Простой случай вычитанія. — Вычитанія двухъ чиселъ со многими цифрами, случай частный. — Общій случай вычитанія. — Правило вычитанія. — Повѣрка вычитанія.

О сложеніи.

14. *Сложеніе есть дѣйствіе, имѣющее цѣлью составленіе числа, заключающаго въ себѣ всѣ единицы, находящіяся въ двухъ или въ нѣсколькихъ данныхъ числахъ.*

Результатъ сложенія называется *суммою*.

Простые случаи сложенія.

15. Разсмотримъ предварительно сложеніе двухъ чиселъ, имѣющихъ по одной цифрѣ, напримѣръ, 8 и 5. Мы получимъ требуемую сумму, прибавляя послѣдовательно къ 8 столько разъ единицу, сколько разъ она заключается въ 5; такимъ образомъ

8 и 1 составятъ 9,
9 и 1 10,
10 и 1 11,
11 и 1 12,
12 и 1 13,

и сумма будетъ 13.

Далѣе, займемся сложеніемъ числа изъ одной цифры съ числомъ изъ нѣсколькихъ цифръ. Пусть 5 и 238 будутъ

эти два числа. Послѣднее состоитъ изъ 23 десятковъ и 8 единицъ (§ 12); эти 8 единицъ прикладываемъ къ 5, составляющимъ первое число, получимъ 13 единицъ, или лучше одинъ десятокъ и 3 единицы. Поэтому искомая сумма будетъ состоять изъ 23 десятковъ, 1 десятка и 3 единицъ; или изъ 24 десятковъ и 3 единицъ, т. е. эта сумма будетъ 243.

Навыкъ, дѣлать такимъ образомъ сложеніе, пріобрѣтается весьма легко; говорятъ вдругъ

8 и 5 . . . 13
238 и 5 . . . 243.

16. Наконецъ, чтобы сдѣлать сложеніе нѣсколькихъ чиселъ однозначныхъ, складываютъ прежде два числа, потомъ результатъ складываютъ съ третьимъ и т. д.

Пусть для примѣра, дано сложить числа

8, 5, 9, 7, 4;

говорятъ

8 и 5 . . . 13,
13 и 9 . . . 22,
22 и 7 . . . 29,
29 и 4 . . . 33;

стало быть сумма будетъ 33.

Общій случай сложенія.

17. Общій случай сложенія приводится къ простому случаю § 16 помощію слѣдующаго основанія:

Сумма нѣсколькихъ чиселъ можетъ быть получена, складывая послѣдовательно единицы этихъ чиселъ, потомъ десятки, сотни и. т. д. и за тѣмъ соединивъ вмѣстѣ всѣ отдѣльныя суммы.

Положимъ, напримѣръ, что желаютъ сложить три числа

9507, 939, 5028.

Для большей удобности располагаютъ дѣйствіе такъ:

9507
939
5028

15474.

Данныя числа подписываютъ одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного порядка находились бы въ одномъ

вертикальномъ столбцѣ. Подъ послѣднимъ числомъ проводятъ черту и подъ нею пишутъ цифры суммы по мѣрѣ ихъ полученія.

Начинаютъ сложеніе простыхъ единицъ и говорятъ: 7 и 9 будетъ 16, 16 и 8 ... 24; 24 и будетъ сумма простыхъ единицъ. Но, какъ эта сумма составляетъ 2 десятка и 4 единицы, то только 4 подписываютъ на мѣстѣ единицъ, а 2 десятка относятъ для присоединенія къ десяткамъ данныхъ чиселъ.

Далѣе, переходятъ къ столбцу десятковъ и говорятъ: 2 было и 3 будетъ 5; 5 и 2 ... 7; 7 и будетъ сумма десятковъ, подъ которыми и пишутъ эту цифру.

Потомъ переходятъ къ столбцу сотенъ и говорятъ: 5 и 9 будетъ 14; а такъ какъ эти 14 составляютъ 1 тысячу и 4 сотни, то на мѣстѣ сотенъ пишутъ одну только цифру 4, а 1 тысячу присоединяютъ къ тысячамъ въ слѣдующемъ столбцѣ.

Наконецъ обращаются къ столбцу тысячъ и говорятъ: 1 была и 9 будетъ 10, 10 и 5 будетъ 15. Эти 15 тысячъ составляютъ 1 десятокъ тысячъ и 5 тысячъ; поэтому 5 пишутъ на мѣстѣ тысячъ, а 1 ставятъ слѣва.

Такимъ образомъ получаютъ сумму данныхъ чиселъ 15474.

18. Въ практикѣ производятъ сложеніе говоря:

7 и 9 . . 16 и 8 . . 24; *пишу* 4, *переношу* 2,
2 и 3 . . . 5 и 2 . . . 7; *пишу* 7,
5 и 9 . . 14 . . . . . *пишу* 4, *переношу* 1,
1 и 9 . . . 10 и 5 . . . 15; *пишу* 5, *а слѣва* 1.

Правило сложенія.

19. Изъ всего изложеннаго выводимъ слѣдующее правило:

Чтобы сложить два или нѣсколько чиселъ, подписываютъ ихъ одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного и того же порядка находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ и проводятъ черту подъ послѣднимъ числомъ. Потомъ находятъ сумму цифръ перваго столбца справа и, если результатъ не превыситъ 9, его пишутъ подъ чертой въ первомъ столбцѣ; въ противномъ случаѣ, пишутъ только единицы, а десятки оставляютъ для присоединенія къ суммѣ цифръ втораго столбца. Такимъ образомъ поступаютъ до послѣдняго столбца; потомъ пишутъ число выражающее

сумму цифръ этаго столбца съ присоединеніемъ придаточныхъ такъ, чтобы первая цифра справа пришлась подъ послѣднимъ столбцемъ.

Примѣчаніе.—Способъ, къ которому приводитъ предложенное правило, состоитъ въ послѣдовательномъ сложеніи единицъ различныхъ порядковъ, заключающихся въ данныхъ числахъ. При этомъ, начинать дѣйствіе, какъ указываетъ правило, съ единицъ меньшихъ порядковъ удобнѣе. Дѣйствительно, если начинать съ порядковъ высшихъ, то въ ходѣ дѣйствія придется исправлять цифры уже написанныя, присоединеніемъ къ нимъ придаточныхъ. Единственный случай, когда безразлично бываетъ начинать сложеніе справа-налѣво или слѣва-направо это тотъ, когда сумма цифръ каждаго столбца менѣе десяти.

Повѣрка сложенія.

20. *Повѣркою какого нибудь дѣйствія называется второе дѣйствіе, имѣющее цѣлью провѣрить первое.*

Чтобы сдѣлать повѣрку сложенія, данныя числа пишутъ въ другомъ порядкѣ нежели тотъ, который былъ употребленъ; или, если и оставляютъ прежній порядокъ, то складываютъ *снизу-вверхъ* или *сверху-внизъ*, вообще обратно прежнему.

О вычитаніи.

21. *Вычитаніе есть дѣйствіе, которое имѣетъ цѣлью отнять отъ даннаго числа столько единицъ, сколько ихъ будетъ въ другомъ данномъ числѣ.*

Результатъ дѣйствія называется *остаткомъ*. Также говорятъ: что остатокъ есть *разность* двухъ данныхъ чиселъ, или *избыткомъ* большаго числа надъ меньшимъ.

Очевидно, что большее изъ данныхъ чиселъ состоитъ изъ единицъ меньшаго числа и остатка; другими словами, оно есть сумма меньшаго числа и остатка. Поэтому можно сказать что

Вычитаніе имѣетъ цѣлью, по даннымъ: суммѣ двухъ частей и одной изъ этихъ частей,—найти другую часть.

Простой случай вычитанія.

22. Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда вычитаемое число имѣетъ только одну цифру и остатокъ менѣе 10. По-

ложимъ, напримѣръ, что должно вычесть 5 изъ 9. На основаніи опредѣленія, изъ 9 должно послѣдовательно отнимать столько разъ единицу, сколько разъ она входитъ въ 5 и говорятъ:

изъ 9 отнимаю 1 останется 8,
— 8 . . . . 1 7,
— 7 . . . . 1 6,
— 6 . . . . 1 5,
— 5 . . . . 1 . . . . 4;

и потому остатокъ будетъ 4.

Положимъ еще, что 6 нужно вычесть изъ 13, говоримъ:

изъ 13 отнимемъ 1 останется 12,
— 12 . . . . 1 11,
— 11 . . . . 1 10,
— 10 . . . . 1 9,
— 9 . . . . 1 8,
— 8 . . . . 1 . . . . 7;

и такъ остатокъ будетъ 7.

Необходимый навыкъ непосредственнаго, быстраго вычитанія легко пріобрѣтается такъ:

изъ 9 вычитаю 5 остается 4,
— 13 . . . . 6 . . . . 7.

Вычитаніе двухъ чиселъ многозначныхъ въ частномъ случаѣ.

23. Вычитаніе двухъ многозначныхъ чиселъ непосредственно сводится на предыдущій случай, если только каждая цифра меньшаго числа не будетъ превышать надъ нею надписанную цифру бо́льшаго числа. Изъ этого выводится слѣдующее:

Разность двухъ чиселъ можно получить, вычитая единицы, десятки, сотни и т. д. меньшаго числа, изъ единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д. бо́льшаго числа, и соединивъ потомъ всѣ эти отдѣльныя разности.

Положимъ, напримѣръ, что должно вычесть 2074 изъ 16097; дѣйствіе располагаютъ такъ:

16097
2074
14023.

Меньшее число пишется подъ бо́льшимъ такимъ образомъ, чтобы единицы одного и того же порядка были въ одномъ вертикальномъ столбцѣ; подъ ними проводятъ черту и подъ нею пишутъ цифры разности по мѣрѣ ихъ полученія.

Сначала опредѣляютъ разность простыхъ единицъ, говоря: 4 изъ 7 въ остаткѣ 3; 3 и будетъ искомымъ остаткомъ, его пишутъ подъ чертою въ столбцѣ единицъ.

Потомъ переходятъ къ столбцу десятковъ и говорятъ: 7 изъ 9 останется 2, цифру 2 пишутъ на мѣстѣ десятковъ.

Такъ какъ предложенныя числа не содержатъ сотенъ, то цифра сотенъ остатка будетъ нуль и его пишутъ на мѣстѣ сотенъ.

Въ столбцѣ тысячъ говорятъ: 2 изъ 6 въ остаткѣ 4, и эту цифру пишутъ на мѣстѣ тысячъ.

Наконецъ, такъ какъ большее число имѣетъ 1 десятокъ тысячъ, которыхъ меньшее число не имѣетъ, то цифра десятковъ тысячъ въ остаткѣ будетъ 1, которую и пишутъ на мѣстѣ десятковъ тысячъ.

Такимъ образомъ искомый остатокъ будетъ 14023.

Общій случай вычитанія.

24. Общій случай вычитанія подводится подъ предыдущее на основаніи слѣдующаго:

Разность двухъ чиселъ не измѣняется, если мы увеличимъ оба числа однимъ и тѣмъ же третьимъ числомъ.

Это основаніе очевидно, потому что разность двухъ чиселъ выражаетъ, сколько единицъ заключается въ большемъ числѣ, которыхъ не содержится въ меньшемъ, откуда слѣдуетъ, что эта разность не можетъ измѣниться отъ прибавленія къ обоимъ числамъ одного и того же числа единицъ.

25. Положимъ теперь, что намъ должно вычесть 176382 изъ 205634:

$$\begin{array}{r} 205634 \\ 176382 \\ \hline 29252. \end{array}$$

Производимъ вычитаніе единицъ и въ результатѣ находимъ 2, что и пишемъ на мѣстѣ единицъ. Но переходя ко второму столбцу, находимъ препятствіе, потому что 8 изъ 3 вычесть нельзя; тогда мы цифру 3 увеличиваемъ десятью, но только съ тѣмъ, что когда мы перейдемъ къ слѣдующе-

му столбцу; то мы должны будемъ увеличить единицею цифру меньшаго числа.

Очевидно, дѣйствуя такимъ образомъ, мы увеличимъ оба данныя числа 10-ю единицами втораго порядка, или 1-ю третьяго порядка, но отъ этаго, на основаніи § 24, результатъ не долженъ измѣниться. Такимъ образомъ говорятъ: 8 изъ 13 въ остаткѣ 5, и эту цифру пишутъ на мѣстѣ десятковъ въ разности.

Переходя къ третьему столбцу, говорятъ: 3 и 1 будетъ 4, 4 изъ 6 въ остаткѣ 2, цифру 2 пишутъ на мѣстѣ сотенъ.

Переходя къ четвертому столбцу и замѣтивъ, что нельзя вычесть 6 изъ 5, къ 5 прибавляютъ десять и говорятъ: 6 изъ 15 въ остаткѣ 9 и эту цифру пишутъ на мѣстѣ тысячъ.

Приступая къ пятому столбцу, должно увеличить единицею цифру меньшаго числа, а далѣе поступать по предъидущему, говоря: 7 и 1 будетъ 8, 8 изъ 10 въ остаткѣ 2, 2 и подписать подъ десятками тысячъ.

Наконецъ дойдя до шестаго столбца и послѣдняго, говорятъ: 1 и 1 будетъ 2, 2 изъ 2 въ остаткѣ нуль, который писать безполезно.

Искомый остатокъ такимъ образомъ будетъ 29252.

26. Въ практикѣ поступаютъ такъ, говоря:

	2	изъ 4 въ	встаткѣ 2,
	8	— 13	5,
1 и 3 . . .	4	— 6	2,
	6	— 15	9,
1 и 7 . . .	8	— 10	2,
1 и 1 . . .	2	— 2	0.

Правило вычитанія.

27. Изъ предъидущаго можно извлечь слѣдующее правило: *Чтобы получить разность двухъ чиселъ, пишутъ меньшее подъ большимъ такъ, чтобы единицы одного порядка были въ одномъ вертикальномъ столбцѣ и подъ меньшимъ числомъ проводятъ черту. Потомъ начинаютъ вычитать съ правой стороны каждую цифру меньшаго числа изъ цифры бо́льшаго, надъ ней стоящей, записывая внизу разность. Когда цифра бо́льшаго числа меньше подписанной цифры меньшаго, то ее увеличиваютъ на 10 единицъ, тогда вычитаніе будетъ возможно; но только при этомъ*

переходя къ слѣдующему столбцу, нужно увеличить цифру меньшаго числа единицею.

Примѣчаніе—Начинать дѣйствіе съ правой стороны, какъ показано въ предъидущемъ правилѣ, необходимо; потому что, начиная съ лѣвой стороны, придется переправлять одну или нѣсколько цифръ уже написанныхъ, когда мы дойдемъ до какого нибудь столбца, въ которомъ цифра меньшаго числа будетъ болѣе цифры бо̀льшаго. Частный случай § 23 есть единственный, который съ какой бы стороны ни начинали—все равно.

Повѣрка вычитанія.

24. Повѣрка вычитанія производится складывая остатокъ съ меньшимъ числомъ. Если въ результатѣ получится большее число, то это удостовѣритъ (§ 21) въ правильности перваго вычисленія.

Упражненія.

1) Сдѣлать сложеніе чиселъ: 999999, 990099, 88988, 77877, 696.

2) Изъ 524020 индивидуумовъ, которые, положимъ, въ извѣстное время имѣютъ 16-ти-лѣтній возрастъ, по показаніямъ Дювильяра, только 369404 достигаютъ сорокалѣтняго возраста. Требуется узнать сколько умираетъ въ этотъ промежутокъ времени.

3) *Дополненіемъ* какого нибудь числа называется число, которое если придать къ данному числу, то получится единица непосредственно высшаго порядка, чѣмъ, который представляетъ первая слѣва цифра въ данномъ числѣ. На этомъ основаніи требуется найти дополненія чиселъ: 7, 508, 7246, 89700.

4) Почему, чтобы получить дополненіе какого нибудь числа, достаточно, первую справа значущую цифру числа замѣнить разностію ея противу 10 и каждую послѣдующую за тѣмъ цифру замѣнять разностію ея противу 9?

5) Когда дано сдѣлать вычитаніе, то можно, не измѣняя разности, придать къ каждому изъ двухъ чиселъ дополненіе меньшаго числа. Чѣмъ таковое сложеніе легче требуемаго вычитанія?

6) Найти помощью дополненій разность между 987643 и 1523604.

ГЛАВА III.

УМНОЖЕНІЕ.

Объ умноженіи.—Таблица умноженія.—Умноженіе числа изъ нѣсколькихъ цифръ на число изъ одной цифры. — Умноженіе числа на значущую цифру, сопровождаемую однимъ или нѣсколькими нулями.—Общій случай умноженія. – Правило умноженія. — Частный случай когда множимое и множитель оканчиваются нулями. – Число цифръ произведенія.—Повѣрка умноженія.

Объ умноженіи.

29. *Умноженіе есть дѣйствіе, имѣющее цѣлью найти число, составленное изъ столькихъ частей равныхъ одному данному числу, сколько будетъ единицъ въ другомъ данномъ числѣ.*

Первое данное называется *множимымъ*, второе *множителемъ;* результатъ дѣйствія называется *произведеніемъ*. Множимое и множитель называются также *производителями* произведенія.

Такимъ образомъ умножить 5 на 3, значитъ составить сумму изъ 3 чиселъ равныхъ 5. Эта сумма равна 15, и говорятъ, произведеніе 5 на 3 будетъ 15. Въ этомъ примѣрѣ 5 есть множимое, 3 множитель.

Изъ опредѣленія видно также, что если множитель равенъ единицѣ, произведеніе равно множимому; такимъ образомъ *произведеніе всякаго числа на единицу есть тоже самое число.*

Таблица умноженія.

30. Умноженіе, будучи сложеніемъ нѣсколькихъ равныхъ чиселъ, можетъ быть производимо по правилу, данному для сложенія вообще (§ 19). Но этотъ пріемъ, непрактичный

даже и въ случаѣ незначительныхъ чиселъ, на самомъ дѣлѣ есть тотъ, который употребляется для полученія произведенія двухъ однозначныхъ чиселъ и къ нему, какъ мы увидимъ далѣе, приводятся всѣ другіе случаи. Мы скоро увидимъ, что необходимо для быстраго счисленія знать наизустъ всѣ, такимъ образомъ составленныя, произведенія двухъ однозначныхъ чиселъ.

31. Такія произведенія помѣщаются въ слѣдующей таблицѣ, которой устройство и употребленіе мы объяснимъ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Первый горизонтальный рядъ заключаетъ въ себѣ первыя девять чиселъ, или, что тоже, произведеніе первыхъ девяти чиселъ на единицу.

Для составленія втораго горизонтальнаго ряда, складываютъ каждое изъ чиселъ перваго само съ собою и результатъ пишутъ внизу, этотъ второй рядъ представляетъ произведенія девяти первыхъ чиселъ на 2.

Для составленія третьяго горизонтальнаго ряда, каждое изъ чиселъ втораго ряда складываютъ съ числомъ стоящимъ въ первомъ ряду, т. е. съ тѣмъ, которое находится съ нимъ въ одномъ вертикальномъ ряду и результатъ пишутъ внизу. Третій горизонтальный рядъ представляетъ такимъ образомъ произведенія девяти первыхъ чиселъ на 3.

Точно также для составленія четвертаго горизонтальнаго ряда, складываютъ каждое изъ чиселъ третьяго ряда съ числомъ написаннымъ въ первомъ ряду, записывая результаты внизу. Этотъ четвертый рядъ представляетъ произведенія первыхъ девяти чиселъ на 4.

Такимъ образомъ каждый послѣдующій рядъ, до девятаго включительно, образуется сложеніемъ каждаго изъ чиселъ ряда предшествующаго съ числомъ соотвѣтственно стоящимъ въ первомъ ряду; изъ чего слѣдуетъ, что всѣ девять рядовъ горизонтальныхъ представляютъ послѣдовательно произведенія девяти первыхъ чиселъ на 1, 2, 3, . . 9.

32. Употребленіе этой таблицы слѣдующее: Положимъ, напримѣръ, что требуется найти произведеніе 7 на 6. По устройству этой таблицы искомое произведеніе должно быть въ седьмомъ вертикальномъ ряду, который представляетъ произведенія на 7 всѣхъ первыхъ девяти чиселъ; но оно въ тоже время должно быть и въ шестомъ горизонтальномъ ряду, который представляетъ произведенія первыхъ девяти чиселъ на 6, слѣдовательно оно должно быть въ пересѣченіи этихъ рядовъ. Такимъ образомъ искомое произведеніе будетъ 42.

Умноженіе числа изъ нѣсколькихъ цифръ на число изъ одной цифры.

33. Изъ опредѣленія умноженія и началъ, на которыхъ основано правило сложенія, мы выводимъ слѣдующее:

Чтобы умножить число изъ нѣсколькихъ цифръ на число изъ одной цифры, должно умножить единицы, десятки, сотни, и т. д. множимаго на множителя и потомъ соединить эти отдѣльныя произведенія.

Положимъ, напримѣръ, что слѣдуетъ умножить 2096 на 7. Ходъ дѣйствія слѣдующій.

2096
7
14672

Множитель пишется подъ множимымъ и подъ нимъ проводится черта, потомъ подъ чертою пишутъ цифры произведенія по мѣрѣ того, какъ онѣ получаются.

Прежде всего умножаютъ единицы множимаго на множителя и говорятъ: 7 разъ 6 будетъ 42. Такъ какъ эти 42 единицы составляютъ 4 десятка и 2 единицы, то на мѣстѣ единицъ въ произведеніи пишутъ только цифру 2, а 4 десятка удерживаютъ, чтобы передать ихъ потомъ къ произведенію десятковъ множимаго на множителя.

Переходя къ десяткамъ, говорятъ: 7 разъ 9 будетъ 63, съ удержанными 4 будетъ 67. Эти 67 десятковъ составляютъ 6 сотенъ и 7 десятковъ, въ произведеніи пишутъ одну только цифру 7, а 6 удерживаютъ.

Но такъ какъ въ предложенномъ примѣрѣ множимое не имѣетъ сотенъ, то въ произведеніи ихъ будетъ только 6, сколько было удержано.

Наконецъ, переходя къ тысячамъ, говорятъ: 7 разъ 2 будетъ 14 и это число пишутъ слѣва найденныхъ цифръ.

Такимъ образомъ получится произведеніе 14672.

34. Въ практикѣ говорятъ такъ:

семью 6 . . . . 42, *пишу* 2, *удерживаю* 4;
семью 9 . . . . 63 и 4 . . 67, *пишу* 7, *удерживаю* 6;
семью 0 . . . . 0 и 6 . . 6, *пишу* 6;
семью 2 . . . . 14, *пишу* 14.

35. Послѣ всего этого можно составить слѣдующее правило:

Чтобы умножить число изъ нѣсколькихъ цифръ на число изъ одной цифры, умножаютъ послѣдовательно каждую цифру множимаго на множителя, начиная съ правой руки. Цифру единицъ перваго отдѣльнаго произведенія пишутъ, а десятки удерживаютъ, чтобы придать ихъ къ слѣдующему отдѣльному произведенію. Цифру единицъ этого произведенія пишутъ налѣво отъ написанной первой цифры, а десятки удерживаютъ, чтобы придать ихъ къ третьему отдѣльному произведенію и т. д.

Примѣчаніе. Причина почему дѣйствіе производится справа-налѣво тоже, что и въ сложеніи.

Умноженіе чиселъ на значущую цифру, сопровождаемую однимъ или нѣсколькими нулями.

36. 1-е *Чтобы умножить какое нибудь число на 10, 100, 1000 и т. д. стоитъ только приписать къ нему съ правой стороны 1, 2, 3 и т. д. нулей.*

Это потому, что основываясь на началахъ письменной нумераціи, каждая цифра будетъ выражать собою единицы въ 10, 100, 1000 и т. д., разъ бо́льшія, чѣмъ прежде, слѣдовательно полученное число увеличится въ 10, 100, 1000 и т. д. разъ; другими словами, оно умножится на 10, 100, 1000 и т. д.

2-е. *Чтобы умножить какое нибудь число на значущую цифру, сопровождаемую однимъ или нѣсколькими нулями, достаточно умножить число на эту цифру и съ правой стороны результата приписать столько нулей, сколько было ихъ съ правой стороны цифры.*

Положимъ, напримѣръ, что желаютъ умножить 2096 на 300, которыя, какъ мы видѣли, есть произведеніе 3 на 100

Напишемъ одно подъ другимъ три числа равныхъ множимому 2096, потомъ, подъ этой группой подпишемъ вторую, подобную группу, потомъ третью и т. д. пока не получится ста группъ.

1. 2096
   2096
   2096

2. 2096
   2096
   2096

3. 2096
   ....
   ....

Очевидно, что 2096 получится написаннымъ въ числѣ разъ равномъ произведенію 3 на 100, слѣдовательно складывая всѣ эти числа, мы получимъ произведеніе 2096 на 300. Но тоже получится и тогда, когда мы будемъ складывать по три числа въ каждой группѣ и потомъ сложимъ 100 такихъ суммъ. Сумма же трехъ чиселъ каждой группы есть произведеніе, 2096 на 3, а для полученія суммы 100 чиселъ равныхъ тому произведенію достаточно, какъ мы видѣли, приписать къ нему справа два нуля. Стало быть для умноженія 2096 на 300, должно 2096 умножить на 3 и къ найденному произведенію приписать справа два нуля, что и слѣдовало доказать.

Общій случай умноженія.

37. Умноженіе какихъ нибудь двухъ чиселъ легко выводится изъ простаго случая, который былъ нами изложенъ.

Положимъ, что желаютъ умножить 2096 на 347. Множитель есть сумма трехъ чиселъ 7, 40 и 300; поэтому искомое произведеніе, которое есть сумма 347 чиселъ равныхъ 2096, получится когда мы составимъ суммы 7 чиселъ, 40 чиселъ и 300 чиселъ равныхъ 2096 и соединимъ вмѣстѣ всѣ эти результаты; или что тоже, когда мы умножимъ 2076 послѣдовательно на 7, 40 и 300 и потомъ сложимъ отдѣльныя произведенія. Первое изъ этихъ произведеній получится по правилу § 35; два послѣднихъ по тому же правилу, но принимая во вниманіе правило § 36.

Самое дѣйствіе располагаютъ такъ:

$$\begin{array}{r} 2096 \\ 347 \\ \hline 14672 \\ 8384 \\ 6288 \\ \hline 727312. \end{array}$$

Множитель подписываютъ подъ множимымъ и проводятъ подъ множителемъ черту. Множимое множатъ на 7 и подъ чертою пишутъ результатъ 14672. Потомъ множимое умножаютъ на 4, и результатъ 8384 подписываютъ подъ первымъ отдѣльнымъ произведеніемъ такъ, чтобы послѣдняя цифра пришлась въ ряду десятковъ. Наконецъ умножаютъ множимое на 3 и результатъ 6288 пишутъ подъ предыдущимъ произведеніемъ такъ, чтобы послѣдняя цифра пришлась въ ряду сотенъ. Потомъ складываютъ всѣ три результата и получаютъ искомое произведеніе 727312.

Примѣчаніе. Отдѣльныя произведенія образующія общее произведеніе суть:

14672, 83840, 628800,

но не

14672, 8384, 6288;

однако при томъ расположеніи дѣйствія, которое нами указано, очевидно, нули безполезны и удобнѣе не писать ихъ вовсе.

Правило умноженія.

38. Изъ всего изложеннаго выводимъ слѣдующее правило: *Чтобы получить произведеніе двухъ чиселъ, пишутъ множителя подъ множимымъ такъ, чтобы единицы одного и того же порядка были въ одномъ ряду и подъ множителемъ проводится черта. Потомъ множимое умножаютъ на каждую цифру множителя и подписываютъ каждый результатъ такъ, чтобы его послѣдняя цифра приходилась подъ множащей цифрой множителя. Затѣмъ останется только соединить всѣ эти результаты и произведеніе найдено.*

Примѣчаніе. Начинать умноженіе съ правой стороны множителя не необходимо, но только удобнѣе.

Частный случай когда и множимое и множитель оканчиваются нулями.

39. *Если одинъ изъ множителей или оба оканчиваются однимъ или нѣсколькими нулями, то отбросивъ эти нули, перемножаютъ эти числа, потомъ къ правой сторонѣ найденнаго произведенія приписываютъ столько нулей, сколько ихъ было во множимомъ или во множителѣ.*

Напримѣръ, чтобы получить произведеніе 27000 на 43000, достаточно умножить 27 на 43 и къ результату справа приписать пять нулей.

Дѣйствительно, разсужденіями подобными изложеннымъ въ § 36, можно доказать, что произведеніе 27000 на 4300 получится, умноживъ 27000 на 43 и приписавъ къ результату два нуля. Съ другой стороны, такъ какъ 27000 то же, что 27 единицъ порядка тысячъ, то произведеніе 27000 на 43 будетъ равно 27 единицамъ тысячъ, повтореннымъ 43 раза, т. е. число тысячъ будетъ равно 27, умноженнымъ на 43. Такъ какъ произведеніе 27000 на 43 получается когда къ произведенію 27 на 43 припишемъ три нуля, то изъ сего слѣдуетъ, что произведеніе 27000 на 4300 получится тогда, когда справа къ произведенію 27 на 43 мы припишемъ пять нулей.

Число цифръ произведенія.

40. *Число цифръ произведенія равно числу цифръ множимаго, увеличенному числомъ цифръ множителя, или этой суммѣ уменьшенной единицею.*

Дѣйствительно, положимъ, что множимое состоитъ изъ четырехъ цифръ, напримѣръ 2096 и что множитель въ три цифры.

Множитель, имѣя три цифры, не менѣе 100, поэтому произведеніе не менѣе 2096 на 100, что составитъ 209600, а потому число цифръ произведенія не менѣе суммы цифръ множителей уменьшенной единицею.

Съ другой стороны, множитель менѣе тысячи; поэтому произведеніе менѣе произведенія 2096 на 1000, которое есть 2096000; значитъ, число цифръ произведенія не превышаетъ сумму цифръ множителей.

Повѣрка умноженія.

41. Чтобы сдѣлать повѣрку умноженія принимаютъ множимое за множителя и обратно. Если прежде найденное произведеніе не получится, то провѣряютъ прежнее вычисленіе. Это вытекаетъ изъ слѣдующаго начала:

42. *Произведеніе двухъ чиселъ не измѣняется, когда множимое будетъ принято за множителя и обратно.*

Я говорю, напримѣръ, что произведеніе 5 на 4 равно произведенію 4 на 5. Дѣйствительно, напишемъ, въ горизонтальномъ направленіи, рядомъ, столько единицъ, сколько ихъ въ числѣ 5, и такихъ рядовъ напишемъ столько, сколько единицъ въ числѣ 4; тогда составится слѣдующая таблица:

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

въ которой, какъ видно, число единицъ равно произведенію 5 на 4. Но если мы будемъ разсматривать единицы вертикальнаго ряда, то увидимъ, что число ихъ равно 4, а

такъ какъ вертикальныхъ рядовъ пять, то изъ этого слѣдуетъ, что число единицъ, заключающееся въ таблицѣ, равно также произведенію 4 на 5. Значитъ произведенія 5 на 4 и 4 на 5 — тождественны.

Упражненія.

1. Найти сколько часовъ, минутъ, секундъ въ обыкновенномъ году, (въ 365 дней) (*).

2. Объемъ солнца приблизительно считаютъ въ 1,384500 объемовъ земли. Съ другой стороны объемъ земли приблизительно равенъ 80 объемамъ луны. Сколько объемовъ луны составятъ объемъ солнца?

3. Изъ 1000000 индивидуумовъ, положимъ въ настоящій моментъ, родившихся во Франціи, среднимъ числомъ ежегодно умираетъ по 14057, въ продолженіи 50 лѣтъ. Требуется найти сколько живыхъ останется къ концу 50-го года?

4. Въ Департаментѣ Сены, имѣющемъ пространства 475 квадратныхъ киллометровъ, считается среднимъ числомъ по 2871 жителей на каждый квадратный киллометръ. Требуется опредѣлить народонаселеніе этаго департамента.

5. Каждое послѣдуетъ измѣненіе въ произведеніи, если придать одну, двѣ, три и т. д. единицы къ множимому или къ множителю?

7. Какое послѣдуетъ измѣненіе въ произведеніи, если отнять одну, двѣ, три и т. д. единицы отъ множимаго или отъ множителя?

(*) Въ однихъ сутках 24 часа, въ одномъ часу 60 минутъ, въ одной минутѣ 60 секундъ.

ГЛАВА IV.

ДѢЛЕНІЕ.

О дѣленіи. — Опредѣленіе числа цифръ частнаго. — Случай когда частное только въ одну цифру. — Расположеніе дѣйствія и практическій пріемъ для пріисканія цифры. — Начала на которыхъ основывается дѣленіе въ томъ случаѣ, когда частное изъ нѣсколькихъ цифръ. — Общій случай дѣленія. — Правило дѣленія. — Случай когда дѣлитель оканчивается нулями. — Повѣрка дѣленія.

О дѣленіи.

43. *Дѣленіе есть дѣйствіе, имѣющее цѣлью найти сколько разъ одно данное число содержится въ другомъ данномъ числѣ.*

Первое данное число называется *дѣлимымъ*, второе *дѣлителемъ*, а искомое число называется *частнымъ*.

Дѣленіе можно производить посредствомъ вычитанія. Напримѣръ, желаемъ раздѣлить 14 на 4; вычтя 4 изъ 14, въ остаткѣ получимъ 10; вычтя опять 4 изъ 10, остатокъ будетъ 6; вычтя еще разъ 4 изъ 6, получится остатокъ 2, меньшій чѣмъ 4. Очевидно, что изъ дѣлимаго 14 можно три раза послѣдовательно вычитать дѣлителя 4, послѣ чего послѣдній остатокъ получится 2, меньшій 4; слѣдовательно 3 есть частное отъ дѣленія 14 на 4.

Но этотъ пріемъ, легко доставившій намъ результатъ въ избранномъ нами примѣрѣ, въ другихъ случаяхъ бо́льшею частію будетъ неудобенъ; поэтому мы должны будемъ разсмотрѣть другіе способы.

44. По опредѣленію, предложенному выше, разность между дѣлимымъ и произведеніемъ дѣлителя на частное должна быть менѣе дѣлителя. Эта разность можетъ и не существовать т. е. быть равной *нулю*, тогда говорятъ, что *дѣленіе окончено*. Въ другихъ же случаяхъ разность, о которой мы говоримъ, называется *остаткомъ дѣленія*.

Изъ этого заключаемъ что:

Во всякомъ кончающемся дѣленіи, дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное.

Въ дѣленіяхъ же не оканчивающихся дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ.

Мы видѣли (§ 42), что произведеніе двухъ чиселъ не измѣнится, если принимать множимое за множителя и обратно; поэтому, во всякомъ оконченномъ дѣленіи, дѣлимое можно разсматривать; какъ сумму столькихъ частей равныхъ частному, сколько единицъ будетъ въ дѣлителѣ. Слѣдовательно можно сказать, что въ этомъ случаѣ, *дѣленіе имѣетъ цѣлью раздѣлить одно данное число на столько равныхъ частей, сколько будетъ единицъ въ другомъ данномъ числѣ, т. е. найти одну изъ таковыхъ частей.* Разсматривая съ этой точки зрѣнія и употребляютъ названія: *дѣлимое и дѣлитель.*

Опредѣленіе числа цифръ частнаго.

45. Предварительно займемся составленіемъ правила для опредѣленія числа цифръ частнаго при всякомъ случаѣ.

590547 и 859.

Для того чтобы узнать не содержитъ ли дѣлимое 10 разъ дѣлителя, умножимъ послѣдній на 10, приписавъ для этого съ правой его стороны нуль (§ 36); мы получимъ число

8590,

меньшее дѣлимаго, изъ чего заключаемъ, что частное будетъ не менѣе 10.

Умножая дѣлителя на 100 мы получимъ число

85900,

которое все еще менѣе дѣлимаго, значитъ частное будетъ не менѣе 100.

Но уноживъ дѣлителя на 1000, мы получимъ число

859000,

превышающее дѣлимое, изъ чего заключаемъ, что частное будетъ менѣе 1000.

А такъ какъ частное будетъ менѣе 1000, но болѣе 100, то стало быть оно будетъ число въ три цифры. Другими словами, единицы наивысшаго порядка въ частномъ будутъ сотни.

Дѣлимое заключаетъ въ себѣ 859, но не 8590 сотенъ, изъ чего слѣдуетъ, что число сотенъ, заключающихся въ дѣли-

момъ, будетъ менѣе дѣлителя 859, повтореннаго одинъ разъ, но не десять разъ. Отсюда вообще выводимъ слѣдующее правило:

Если въ дѣлимомъ, начиная слѣва, отдѣлить такое число цифръ, чтобы число ими выражаемое содержало въ себѣ дѣлителя, взятаго не менѣе одного раза, но не болѣе десяти разъ, то порядокъ, который представляетъ собою послѣдняя изъ этихъ цифръ и будетъ наивысшимъ порядкомъ частнаго.

46. Изъ предъидущаго еще видно, что число цифръ частнаго равно числу нулей, которые должно приписать съ правой стороны дѣлителя, чтобы получилось число большее дѣлимаго. Но число составленное такимъ образомъ можетъ имѣть столько же цифръ сколько въ дѣлимомъ, или одною цифрою больше, а потому:

Число цифръ частнаго равно разности между числомъ цифръ дѣлимаго и числомъ цифръ дѣлителя, или равно этой разности, увеличенной единицею.

Частный случай, когда частное будетъ въ одну цифру.

47. Мы уже знаемъ, что частное будетъ имѣть только одну цифру тогда, когда приписавъ справа къ дѣлителю одинъ нуль, получится число большее дѣлимаго.

Предположимъ же прежде, что дѣлитель состоитъ изъ одной только цифры; очевидно, что тогда дѣлимое не можетъ имѣть ихъ болѣе двухъ. Въ этомъ случаѣ частное получится помощію таблицы умноженія.

Пусть требуется раздѣлить 59 на 8. Наибольшее изъ чиселъ въ восьмомъ вертикальномъ ряду таблицы умноженія, которое можетъ заключаться въ 59 есть 56, а это есть произведеніе 8 на 7, почему и заключаемъ, что частное отъ дѣленія 59 на 8 есть 7. При чемъ остатокъ этого дѣленія будетъ равенъ избытку 59 надъ 56, т. е. будетъ равенъ 3.

Зная таблицу умноженія на память, дѣленія такого рода можно производить непосредственно.

48. Предположимъ теперь, что дѣлитель будетъ имѣть нѣсколько цифръ. Дѣленіе можно производить способомъ, подобнымъ предшествовавшему; онъ будетъ состоять въ пріисканіи произведеній дѣлителя на числа 1, 2, 3, и т. д. до тѣхъ поръ, пока не достигнутъ произведенія превышающаго

дѣлимое; тогда множитель предпослѣдняго произведенія будетъ искомымъ частнымъ, а остатокъ получится, вычтя это произведеніе изъ дѣлимаго.

Напримѣръ, требуется раздѣлить 5905 на 859; составляемъ таблицу произведеній 859 на 1, 2, 3... пока не получимъ результата превышающаго 5905. Таблица эта будетъ такого вида:

1	859,
2	1718,
3	2577,
4	3436,
5	4295,
6	5154,
7	6013.

Ясно, что дѣлимое содержитъ въ себѣ 6 разъ дѣлителя, но не содержитъ 7 разъ, поэтому частное будетъ 6, и, такъ какъ произведеніе дѣлителя на 6 есть 5154, то остатокъ дѣленія будетъ равенъ избытку 5905 надъ 5154, т. е. 751.

49. Въ практикѣ рѣдко поступаютъ по предъидущему способу, но частное отыскиваютъ прямо слѣдующимъ образомъ. Удержимъ примѣръ § 48.

Такъ какъ дѣлитель болѣе 8 сотенъ, то частное не должно быть болѣе числа разъ содержанія 8 сотенъ въ дѣлимомъ 5905; дѣлимое же содержитъ въ себѣ 59 сотенъ, слѣдовательно, искомое частное будетъ равно, или менѣе, частнаго отъ дѣленія 59 на 8, т. е. равно, или менѣе 7.

Вмѣстѣ съ тѣмъ дѣлитель менѣе 9 сотенъ, значитъ частное должно быть болѣе числа разъ содержанія въ дѣлимомъ 9 сотенъ, т. е. частнаго 59 на 9, которое есть 6.

Стало быть искомое частное есть 7 или 6.

Предварительно испытываютъ цифру 7. Для этаго умножаютъ дѣлителя на 7 и, такъ какъ произведеніе 6013 больше дѣлимаго, то заключаютъ, что цифра 7 велика; слѣдовательно частное есть 6. Вычитая изъ дѣлимаго, произведеніе дѣлителя на частное 6, которое есть 5154, получаютъ остатокъ дѣленія 751.

50. Все предъидущее приводитъ къ слѣдующему правилу: *Чтобы сдѣлать дѣленіе двухъ чиселъ въ томъ случаѣ, когда частное будетъ имѣть болѣе одной цифры, послѣдовательно дѣлятъ, сначала на первую лѣвую цифру дѣлителя, а потомъ на ту же*

цифру увеличенную единицею, заключающіяся въ дѣлимомъ единицы того же порядка. Такимъ образомъ получатся наибольшій и наименьшій предѣлы искомаго частнаго. Но, въ томъ случаѣ, когда наибольшій предѣлъ превыситъ 9, берутъ 9 вмѣсто этого предѣла.

Далѣе, испытываютъ цифру выражающую наибольшій предѣлъ, для чего умножаютъ дѣлителя на эту цифру и если произведеніе можно будетъ вычесть изъ дѣлимаго, то испытуемая цифра есть точная; если же нѣтъ, тогда точно также испытываютъ цифру предыдущую до тѣхъ поръ, пока не достигнутъ до наименьшаго предѣла, если то будетъ нужно.

Примѣчаніе! Подобное испытаніе можно производить и съ цифры наименьшаго предѣла. Поступая такъ, испытуемая цифра тогда будетъ требуемая, когда разность между дѣлимымъ и произведеніемъ дѣлителя на эту цифру будетъ менѣе дѣлителя.

Ходъ дѣйствія и практическій пріемъ для выбора цифры.

51. Въ практикѣ подобнаго рода испытанія для отысканія частнаго производятъ въ умѣ, какъ мы тотчасъ укажемъ, а самое дѣйствіе располагаютъ такимъ образомъ:

5905	859
5154	6
751	

Дѣлителя пишутъ направо отъ дѣлимаго, раздѣляя ихъ вертикальною чертою. Подъ дѣлителемъ проводятъ горизонтальную черту и подъ нею подписываютъ точную цифру частнаго, когда она будетъ найдена. Подъ дѣлимымъ пишутъ произведеніе дѣлителя на частное, и вычитаютъ это произведеніе изъ дѣлимаго; полученный результатъ будетъ остатокъ дѣленія.

52. Часто дѣйствіе облегчаютъ тѣмъ, что не подписываютъ подъ дѣлимымъ произведенія дѣлителя на частное. Тогда, чтобы получить остатокъ, вычитаютъ послѣдовательно произведенія частнаго на единицы, десятки, сотни и т. д. дѣлителя изъ единицъ тѣхъ же порядковъ дѣлимаго и продолжаютъ это до тѣхъ поръ, пока получится полное произведеніе. Чтобы всѣ вычитанія сдѣлать возможными, должно

руководствоваться, что и необходимо, основаніями § 24, служащими для правила вычитанія. Основываясь на этомъ, прибавляютъ къ каждой цифрѣ дѣлимаго необходимое число *десятковъ*, чтобы вычитаніе сдѣлать возможнымъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ, прибавляютъ такое же число *единицъ* къ слѣдующему произведенію подлежащему вычитанію.

Дѣйствіе располагаютъ тогда такъ:

5905 | 859
751 | 6

и говорятъ:

6 *разъ* 9 . . 54 *изъ* 55 *будетъ* 1, *а* 5 *передаемъ*,
6 *разъ* 5 . . 30 *и* 5 . . . 35 *изъ* 40 *будетъ* 5, *а* 4 *передаемъ*,
6 *разъ* 8 . . 48 *и* 4 . . . 52 *изъ* 59 *будетъ* 7.

53. Употребляя такой способъ дѣйствія, можно цифру частнаго пріискивать въ умѣ. Такимъ образомъ въ предложенномъ примѣрѣ, по правилу § 50, указывается на цифру 7, тогда дѣлителя написавъ направо отъ дѣлимаго

5905 | 859

говорятъ:

7 *разъ* 9 . . . 63 *изъ* 65 *будетъ* 2, *а* 6 *передаемъ*,
7 *разъ* 5 . . 35 *и* 6 . . . 41 *изъ* 50 *будетъ* 9, *а* 5 *передаемъ*,
7 *разъ* 8 . . 56 *и* 5 . . . 61 *изъ* 59 *вычесть нельзя*;

почему и заключаютъ, что цифра 7 велика.

Но также весьма часто можно сокращать подобное испытаніе. Дѣлая изслѣдованіе предыдущимъ путемъ, очевидно, что оно только тогда кончится, когда всѣ цифры дѣлителя перемножатъ на избранную цифру. Но, начиная тоже дѣйствіе противуположно прежнему, слѣва, часто бываетъ безполезно доводить это дѣйствіе до конца.

Умножая цифры дѣлителя на избранную цифру, начиная слѣва и вычитая *въ умѣ* эти отдѣльныя произведенія изъ единицъ соотвѣтственныхъ порядковъ дѣлимаго, прекращаютъ дѣйствіе тогда, когда удостовѣрятся, что избранная цифра вѣрна или очень велика.

Такъ въ предложенномъ примѣрѣ говорятъ:

7 *разъ* 8 . . . 56 *изъ* 59 *будетъ* 3
7 *разъ* 5 . . 35 *изъ* 30 *вычесть нельзя*,

поэтому цифра 7 велика.

Возьмемъ теперь цифру 6, и произведемъ этотъ способъ изслѣдованія, хотя мы по правилу § 50 уже знаемъ, что эта цифра вѣрна.

Говорятъ:

6 разъ 8 . . 48 изъ 59 будетъ 11;

здѣсь повѣрка и кончится, и цифра 6 есть цифра частнаго, *потому что остатокъ 11, который мы получили, есть число въ двѣ цифры.* Дѣйствительно, остатокъ отъ дѣлимаго, когда мы вычли произведеніе 8 сотенъ на 6, получился 1105, число большее двумя цифрами числа 59, составляющаго десятки и единицы дѣлителя, поэтому 1105 заключаетъ въ себѣ по меньшей мѣрѣ 10 разъ 59, слѣдовательно оно заключаетъ въ себѣ 59 болѣе 6 разъ.

54. *Примѣчаніе.* Мы очень долго задерживали вниманіе на подробностяхъ вычисленія потому, что способность быстро вычислять пріобрѣтается не скоро. Необходимо хорошо усвоить частные случаи нами изложенные, и тогда изученіе общихъ случаевъ пойдетъ безъ затрудненія.

Начало, на которомъ основывается дѣленіе въ томъ случаѣ, когда частное будетъ изъ нѣсколькихъ цифръ.

55. Дѣленіе двухъ чиселъ, въ томъ случаѣ, когда частное будетъ изъ нѣсколькихъ цифръ, основывается единственно на томъ началѣ, помощію котораго послѣдовательно опредѣляютъ, начиная слѣва или обратно, всѣ цифры частнаго. Начало это слѣдующее:

Если отдѣлить слѣва въ дѣлимомъ столько цифръ, чтобы въ числѣ ими представляемомъ, дѣлитель содержался не менѣе одного, но менѣе десяти разъ и если раздѣлить это число на дѣлителя, то полученное частное будетъ точная цифра высшихъ единицъ искомаго частнаго для данныхъ чиселъ.

Возьмемъ для примѣра два числа 590547 и 859. Должно отдѣлить слѣва въ дѣлимомъ четыре цифры, чтобы получить число превышающее дѣлителя и, такъ какъ послѣдняя изъ этихъ цифръ выражаетъ сотни дѣлимаго, то первая цифра частнаго будетъ выражать тоже сотни (§ 45).

Положивъ это, я говорю, что эта цифра въ точности равная частному отъ дѣленія 5905 на 895 будетъ 6, по пра-

вилу § 50. Дѣйствительно, такъ какъ изъ 5905 можно вычесть произведеніе 859 на 6, а между тѣмъ данное дѣлимое заключаетъ въ себѣ 5905 сотенъ, то изъ этого дѣлимаго можно вычесть число сотенъ равное произведенію 859 на 6, т. е. число равное произведенію дѣлителя на 600. Такимъ образомъ частное отъ дѣленія 509547 на 859 по крайней мѣрѣ должно быть равно 600.

Но, съ другой стороны, такъ какъ мы не можемъ вычесть изъ 5905 произведенія 859 на 7, и между тѣмъ данное дѣлимое содержитъ только 5905 сотенъ, стало быть изъ дѣлимаго нельзя вычесть числа сотенъ равнаго произведенію 859 на 7, т. е. числа равнаго произведенію 859 на 700; поэтому частное отъ дѣленія 590547 на 859 будетъ менѣе 700.

И такъ значитъ, частное данныхъ чиселъ состоитъ изъ 6 сотенъ, но не заключаетъ ихъ болѣе, а это и составляетъ доказательство указаннаго начала.

Общій случай дѣленія.

56. Положимъ, что требуется раздѣлить 590547 на 859, числа уже разсматривавшіяся въ предъидущемъ параграфѣ. Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

590547	859
75147	687
6427	
414	

Дѣлитель пишутъ направо отъ дѣлимаго; раздѣляя ихъ вертикальною чертою. Подъ дѣлителемъ проводятъ черту и подъ ней пишутъ цифры частнаго по мѣрѣ ихъ полученія.

Потомъ пріискиваютъ первую цифру частнаго. Для этой цѣли отдѣляютъ въ дѣлимомъ слѣва четыре цифры; эти четыре цифры необходимы, чтобы составить число превышающее дѣлитель. Послѣдняя цифра этого числа 5905 представляетъ сотни въ данномъ дѣлимомъ, потому и первая цифра частнаго будетъ также выражать сотни (§ 45). Дѣлятъ 5905 на дѣлителя, слѣдуя правилу § 50, и получаютъ такимъ образомъ частное 6 и въ остаткѣ 751. Цифра 6 будетъ цифрою сотенъ искомаго частнаго (§ 55); и если *снесемъ* цифру десятковъ дѣлимаго, а также и единицы, и припишемъ ихъ

справа къ остатку, то увидимъ, что образовавшееся число 75147 будетъ избыткомъ дѣлимаго надъ произведеніемъ дѣлителя на 6 сотенъ.

Потомъ, точно также приступаютъ къ отысканію сколько разъ 75147 содержитъ въ себѣ 859, или, другими словами, дѣлятъ 75147 на 859. Частное отъ этого новаго дѣленія будетъ въ двѣ цифры и будетъ составлять десятки и единицы искомаго частнаго.

Что частное увеличится двумя цифрами, это потому, что число 7514 есть десятки новаго дѣлимаго 75147 и превышаетъ дѣлителя 859. Поэтому, раздѣливъ 7514 на 859, слѣдуя правилу § 50, найдемъ такимъ образомъ для частнаго 8 и въ остаткѣ 642. Цифра 8 будетъ цифрою десятковъ искомаго частнаго (§ 55) и, если снести цифру единицъ дѣлимаго и приписать ее справа къ остатку 642, то увидимъ, что образовавшееся число 6427 будетъ избыткомъ дѣлимаго надъ произведеніемъ дѣлителя на 8 десятковъ. Затѣмъ, вопросъ приведется къ дѣленію 6427 на 859. Частное этого новаго дѣленія не можетъ имѣть болѣе одной цифры; предложивъ опять правило § 50, найдемъ для частнаго 7, въ остаткѣ 414.

Короче говоря, видно, что все состоитъ въ вычитаніи изъ даннаго дѣлимаго 590547 произведеній дѣлителя на 600, на 80 и на 7, и, что такимъ образомъ получится остатокъ 414, меньшій дѣлителя. И будетъ отъ даннаго дѣленія въ результатѣ: 687 частное и 414 остатокъ.

57. *Отдѣльными дѣлимыми* называются тѣ числа, которыя дѣлятся послѣдовательно на дѣлителя для полученія различныхъ цифръ частнаго.

Въ предложенномъ примѣрѣ отдѣльныя дѣлимыя суть 5905, 7514, 6427.

Первое изъ этихъ дѣлимыхъ есть число сотенъ даннаго дѣлимаго 590547, оно намъ служило для отысканія цифры сотенъ частнаго.

Второе отдѣльное дѣлимое нами получено отъ *снесенія* цифры десятковъ даннаго дѣлимаго и приписанія ее справа къ остатку отъ перваго отдѣльнаго дѣленія, или просто къ первому остатку. Оно намъ служило для пріисканія десятковъ частнаго.

Точно также, третье отдѣльное дѣлимое получилось отъ снесенія цифры единицъ даннаго дѣлимаго и приписанія оной справа къ остатку втораго отдѣльнаго дѣленія т. е. ко второму остатку. Оно намъ служило для отысканія единицъ частнаго.

Остатокъ отъ третьяго отдѣльнаго дѣленія, или третій остатокъ есть остатокъ отъ предложеннаго дѣленія.

Въ практикѣ ограничиваются тѣмъ, что подъ даннымъ дѣлимымъ пишутъ отдѣльныя дѣлимыя начиная со втораго и все дѣйствіе располагаютъ такъ:

590547	859
7514	687
6427	
414	

Правило дѣленія.

58. Изъ всего предшествующаго выводимъ слѣдующее правило:

Чтобы произвести дѣленіе двухъ чисель въ случаѣ, когда частное будетъ изъ нѣсколькихъ цифръ, дѣлителя пишутъ направо отъ дѣлимаго раздѣляя ихъ вертикальною чертою. Проводятъ горизонтальную черту подъ дѣлителемъ и пишутъ подъ нею цифры частнаго по мѣрѣ ихъ нахожденія:

Въ дѣлимомъ слѣва отдѣляютъ столько цифръ, чтобы число ими составленное могло содержать въ себѣ дѣлителя не менѣе одного раза, но менѣе десяти разъ. Это число будетъ первое отдѣльное дѣлимое и послѣдняя изъ его цифръ будетъ выражать единицы одного и того же порядка съ первою цифрою частнаго. Раздѣливъ первое отдѣльное дѣлимое на дѣлителя, получится въ частномъ первая цифра искомаго частнаго.

Цифру даннаго дѣлимаго, выражающую собой единицы того же порядка, какого должна быть вторая цифра частнаго, сносятъ, чтобы приписать справа къ остатку отъ перваго дѣленія. Полученное такимъ образомъ второе отдѣльное дѣлимое дѣлятъ на дѣлителя и полученное частное будетъ второю цифрою искомаго частнаго.

Такимъ образомъ дѣйствіе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока будутъ снесены всѣ цифры даннаго дѣлимаго.

Примѣчаніе. Такъ какъ каждый остатокъ менѣе дѣлителя, то каждое дѣлимое будетъ менѣе десять разъ взятаго дѣлителя. Но можетъ случиться, что какое нибудь изъ отдѣльныхъ дѣлимыхъ не будетъ содержать въ себѣ дѣлителя, тогда искомая цифра частнаго будетъ 0, а далѣе составляютъ слѣдующее отдѣльное дѣлимое, снося и приписывая справа къ предъидущему новую цифру изъ даннаго дѣлимаго.

59. *Примѣръ.*—Требуется раздѣлить 31415926535897932 3 на 3183098,

31415926535897932 3	3183098
27680445	98696070733
22156613	
30580255	
19323738	
22515097	
23341193	
10595072	
10457783	
908489	

60. Когда дѣлитель имѣетъ одну цифру, то весьма часто не затрудняютъ вычисленія выписываніемъ отдѣльныхъ дѣлимыхъ. Положимъ, напримѣръ, что нужно раздѣлить 54802 на 7.

Дѣйствіе располагаютъ такъ:

54802	7
6	7828

при этомъ говорятъ:

въ 54 *сколько разъ содержится* 7? 7 *разъ.*
7 *разъ* 7 . . . 49 *изъ* 54 *будетъ* 5; *въ* 58 *сколько разъ содержится* 7? 8 *разъ*,
8 *разъ* 7 . . . 56 *изъ* 58 *будетъ* 2; *въ* 20 *сколько разъ содержится* 7? 2 *раза*,
2 *раза* 7 . . . 14 *изъ* 20 *будетъ* 6; *въ* 62 *сколько разъ содержится* 7? 8 *разъ*,
8 *разъ* 7 . . 56 *изъ* 62 *будетъ* 6; *остатокъ* 6 *пишемъ.*

61. Когда частное какого нибудь дѣленія должно имѣть весьма большое число цифръ, какъ напримѣръ въ § 59, то производятъ нѣсколько отдѣльныхъ дѣленій, по методу § 48 и придерживаясь изложенному въ § 51.

Такимъ образомъ начинаютъ въ составленіи таблицы произведеній дѣлителя на девять первыхъ чиселъ; и изложенное въ примѣрѣ § 59 дѣйствіе располагаютъ тогда слѣдующимъ образомъ:

31415926535897932	3183098
28647882	98696070733
27680445	
25464784	
22156613	
19098588	
30580255	
28647882	
19323738	
19098588	
22515097	
22281686	
23341193	
22281686	
10595072	
9549294	
10457783	
9549294	
908489	

1	3183098
2	6366196
3	9549294
4	12732392
5	15915490
6	19098588
7	22281686
8	25464784
9	28647882

Частный случай, когда дѣлитель оканчивается нулями.

62. *Когда дѣлимое и дѣлитель оканчиваются нулями, тогда въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ отбрасываютъ одинаковое число нулей и полученныя числа дѣлятъ. Найденное частное будетъ частнымъ и для данныхъ чиселъ и, приписавъ къ полученному остатку справа столько нулей, сколько ихъ было отброшено въ дѣлимомъ или въ дѣлителѣ, получаютъ остатокъ отъ дѣленія данныхъ чиселъ.*

Положимъ, напримѣръ, что 58000 дѣлится на 9000. Раздѣляя 58 на 9, получили въ частномъ 6, а въ остаткѣ 4; стало быть 56 единицъ содержатъ въ себѣ 9 единицъ 6 разъ, съ остаткомъ равнымъ 4 единицамъ; слѣдовательно 58 единицъ порядка тысячъ содержатъ въ себѣ 9 единицъ порядка тысячъ 6 разъ и остатокъ равный 4 единицамъ порядка тысячъ. Другими словами, частное 58000 на 9000 есть 6 и остатокъ 4000.

63. *Вообще, если дѣлитель оканчивается нулями, то ихъ отбрасываютъ, и столько же цифръ отбрасываютъ справа въ дѣлимомъ, и дѣлятъ полученныя числа. То частное, которое получится, будетъ частнымъ и для данныхъ чиселъ, и, приписавъ справа къ полученному остатку число образовавшееся изъ отброшенныхъ цифръ дѣлимаго, получаютъ остатокъ отъ дѣленія данныхъ чиселъ.*

Положимъ, что дѣлится 58623 на 9000. Раздѣляя 58 на 9 получимъ въ частномъ 6 и въ остаткѣ 4. На основаніи прежнаго (§ 62), 58000 содержитъ 9000 шесть разъ съ остаткомъ равнымъ 4000; поэтому 58623 содержитъ 6 разъ 9000, съ остаткомъ равнымъ 4000 увеличеннымъ 623, т. е. равнымъ 4623.

Повѣрка дѣленія.

64. Чтобы сдѣлать повѣрку дѣленія, умножаютъ дѣлителя на найденное частное и къ полученному произведенію придаютъ остатокъ, если таковой будетъ.

Если результатъ получится равный дѣлимому, то это докажетъ вѣрность перваго дѣйствія.

Примѣчаніе. Дѣленіе даетъ возможность дѣлать повѣрку умноженія. Для сего раздѣляютъ найденное произведеніе на одного изъ множителей; если это произведеніе вѣрно, то въ частномъ долженъ получиться другой множитель, а въ остаткѣ нуль.

Упражненія.

1) Найти частное и остатокъ отъ дѣленія 98696070733 на 314159.

2) Изъ 1000000 индивидуумовъ, родившихся въ одно время во Франціи, къ концу 39 года остается живыхъ только 376390. Требуется опредѣлить среднюю годовую смертность въ продолженіе этого времени. Другими словами, сколько индивидуумовъ умираетъ ежегодно, хотя и извѣстно, что смертность неправильна.

3) Среднее разстояніе луны отъ земли простирается до 38199000 метровъ; спрашивается, сколько времени употребитъ звукъ, пробѣгающій въ секунду 340 метровъ, чтобы достигнуть отъ луны до земли, если предположить, что онъ будетъ пробѣгать въ однородной средѣ.

4) Ежегодное потребленіе пшеницы во Франціи 5716439726 литровъ. Требуется опредѣлить среднее потребленіе, принимая число жителей равнымъ 34230178.

5) Въ какомъ случаѣ при дѣленіи частное будетъ оставаться одно и тоже, когда мы къ дѣлителю будемъ придавать одну, двѣ, три и т. д. единицы.

6) Положимъ, что какое нибудь дѣленіе совершено и желаютъ раздѣлить дѣлимое на полученное частное, то спрашивается, въ какомъ случаѣ частное этого новаго дѣленія будетъ равно дѣлителю перваго. Требуется также доказать, что можно пользоваться результатомъ перваго дѣйствія для облегченія втораго.

КНИГА ВТОРАЯ.

НАЧАЛЬНЫЯ СВОЙСТВА ЧИСЕЛЪ.

ГЛАВА I.

СВОЙСТВА ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ЧЕТЫРЕМЪ ДѢЙСТВІЯМЪ.

Изъясненіе нѣкоторыхъ употребительныхъ знаковъ и выраженій.—Теорема относящаяся къ вычитанію.—Теоремы относящіяся къ умноженію.—Теоремы относящіяся къ дѣленію.—О степеняхъ.

Изъясненіе нѣкоторыхъ употребляемыхъ знаковъ и выраженій.

65. Для указанія результата дѣйствій, произведенныхъ надъ двумя или нѣсколькими числами, употребляютъ сокращенные знаки, къ изъясненію которыхъ мы и приступимъ.

Для указанія сложенія употребляется знакъ $+$, который, произносится *плюсъ*; такъ $3+4$ представляетъ сумму чиселъ 3 и 4 и произносится 3 *плюсъ* 4. Точно также $3+4+5$ представляетъ сумму чиселъ 3, 4 и 5.

Для указанія вычитанія служитъ знакъ $-$, который произносится *минусъ*; такъ $7-3$ представляетъ разность чиселъ 7 и 3 и произносится 7 *минусъ* 3. Точно также $7+3-4$ представляетъ результатъ, который получился отъ сложенія чиселъ $7+3$ и отъ вычитанія изъ полученной суммы 3.

Для указанія умноженія служитъ знакъ $\times$, который произносится *умножить на*; такъ 7×4 представляетъ произведеніе чиселъ 7 и 4 и произносится 7 *умноженное на 4*.

Для указанія дѣленія служитъ знакъ :, который произносится *раздѣлить на*; но этотъ знакъ мы будемъ употреблять пока только для обозначенія дѣленія оканчивающагося. Такъ, частное отъ дѣленія 20 на 4, недающаго остатка изображается $20 : 4$.

Когда желаютъ указать дѣйствіе надъ числами, изъ которыхъ какое нибудь есть или сумма, или разность, или произведеніе, или частное, но невычисленныя, то эти числа пишутъ въ скобкахъ. Такъ $(3+7)-(5-2)$ выражаетъ, что нужно вычесть разность $5-2$ изъ суммы $3+7$. Точно также $(3+7)\times(5-2)$ представляетъ произведеніе суммы $3+7$ на разность $5-2$; $7\times(3\times5)$ выражаетъ, что 7 нужно умножить на произведеніе, которое получится умноживъ 3 на 5. Наконецъ, $7\times(8 : 4)$ указываетъ, что 7 должно умножить на частное отъ дѣленія 8 на 4.

66. Для обозначенія *равенства* употребляется знакъ $=$, который произносится *равно*; такъ $3\times4=12$, значитъ 3 *умноженное на* 4 *равно* 12.

Для выраженія *неравенства* служитъ знакъ $>$, который произносится *болѣе*; или знакъ $<$, который произносится *менѣе*. Такъ $7 > 5$ и $5 < 7$ выражаютъ, что 7 болѣе 5, или, что все равно, 5 менѣе 7.

Числа, или результаты дѣйствій, составляющія такимъ образомъ равенство или неравенство, называются *членами* равенствъ или неравенствъ.

67. *Теоремою* называется истина, которая сама по себѣ не очевидна, но становится очевидной помощью доказательства. Такимъ образомъ положеніе § 42, на которомъ основана повѣрка умноженія есть теорема.

Слѣдствіе есть заключеніе выведенное изъ теоремы.

Теорема относящаяся къ вычитанію.

68. Теорема.—*Чтобы вычесть изъ какого нибудь числа разность двухъ другихъ чиселъ, должно къ первому числу придать меньшее изъ послѣднихъ и потомъ изъ результата вычесть большее число.*

Дѣйствительно, пусть дано вычесть $13-8$ изъ 12; если, какъ къ тому такъ и къ другому числу, придадимъ по 8, то разность ихъ не измѣнится (§ 24); но тогда вопросъ све-

дется на вычитаніе 13—8+8 т. е. 13 изъ 12+8 и результатъ получится 12+8—13, что и требовалось доказать.

Примѣчаніе. Пользуясь указаніями § 65 и 66, эта теорема можетъ быть выражена равенствомъ

$$12-(13-8)=12+8-13.$$

Теоремы относящіяся къ умноженію.

69. Теорема I.—*Чтобы умножить сумму на какое нибудь число, должно умножить каждую часть суммы на это число и потомъ полученныя отдѣльныя произведенія сложить.*

Положимъ, что требуется умножить 4+5+7 на 3, это значитъ, должно составить сумму изъ трехъ чиселъ равныхъ 4+5+7; стало быть искомое произведеніе будетъ равно

$$4+5+7+4+5+7+4+5+7.$$

Очевидно, что оно составлено изъ трехъ частей равныхъ 4, изъ трехъ частей равныхъ 5 и, наконецъ, изъ трехъ частей равныхъ 7; другими словами, оно есть сумма трехъ отдѣльныхъ произведеній 4×3, 5×3, 7×3; что и составляетъ доказательство предложенной теоремы.

Примѣчаніе.—Эта теорема равенствомъ выразится такъ

$$(4+5+7)\times3=4\times3+5\times3+7\times3.$$

Слѣдствіе.—*Чтобы умножить одно число на какую нибудь сумму, должно умножить это число на каждую изъ частей суммы и сложить потомъ отдѣльныя произведенія.*

Положимъ, что слѣдуетъ умножить 3 на 4+5+7; результатъ будетъ тотъ же (§ 42), что умножить 4+5+7 на 3. Поэтому на основаніи предшествующей теоремы

$$3\times(4+5+7) \text{ или } (4+5+7)\times3=4\times3+5\times3+7\times3;$$

или пожалуй такъ

$$3\times(4+5+7)=3\times4+3\times5+3\times7;$$

что и требовалось доказать.

70. Теорема II.—*Чтобы умножить двѣ суммы, одну на другую, должно умножить каждую часть первой суммы на каждую часть второй и потомъ сложить всѣ найденныя произведенія.*

Дѣйствительно, положимъ, что слѣдуетъ умножить 4+5+7 на 3+8. Основываясь на слѣдствіи теоремы I, должно 4+5+7 умножить прежде на 3, а потомъ на 8 и оба полу-

ченныя результата сложить. Съ другой стороны, по теоремѣ I, произведеніе 4+5+7 на 3 равно

$$4\times3+5\times3+7\times3.$$

Точно также произведеніе 4+5+7 на 8 равно

$$4\times8+5\times8+7\times8;$$

поэтому произведеніе двухъ данныхъ суммъ будетъ

$$4\times3+5\times3+7\times3+4\times8+5\times8+7\times8;$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Примѣчаніе.—Теоремы I и II, на которыхъ основана теорія умноженія, хотя уже и были нами доказаны просто, основными для этой теоріи разсужденіями; но здѣсь мы все-таки считали не лишнимъ предложить доказательство прямое и общее.

71. Теорема III.—*Чтобы умножить разность двухъ чиселъ на третье число, достаточно умножить оба числа на это третье и вычесть меньшее произведеніе изъ бо́льшаго.*

Дѣйствительно, положимъ, что должно умножить разность 7—5 на 3. Совершивъ указанное вычитаніе, найдется разность 2, слѣдовательно 7 есть сумма чиселъ 5 и 2; поэтому произведеніе 7×3 равно (§ 69) суммѣ произведеній 5×3 и 2×3; а стало быть разность $7\times3-5\times3$ равна 2×3, т. е. равна произведенію разности 7—5 на 3; чѣмъ и доказана предложенная теорема.

Примѣчаніе.—Эта теорема выражается равенствомъ

$$(7-5)\times3=7\times3-5\times3.$$

Слѣдствіе.—*Чтобы умножить число на разность двухъ другихъ чиселъ, достаточно умножить первое число на каждое изъ другихъ и вычесть меньшее произведеніе изъ бо́льшаго.*

Ибо, положивъ, что слѣдуетъ умножить 3 на 7—5, результатъ будетъ тотъ же (§ 42), что и умножить 7—5 на 3; поэтому по предъидущей теоремѣ

$$3\times(7-5) \text{ или } (7-5)\times3=7\times3-5\times3,$$

или

$$3\times(7-5)=3\times7-3\times5,$$

что и требовалось доказать.

Приложеніе.—Положимъ, что должно умножить 7997 на 9; имѣемъ

$$7997=8000-3,$$

$$7997\times9=8000\times9-3\times9=72000-27=71973.$$

72. *Произведеніемъ нѣсколькихъ чиселъ* или *нѣсколькихъ множителей* называется результатъ, который получаютъ, умножая первое число на второе, потомъ полученное произведеніе на третье число и т. д. Напримѣръ, произведеніе $7\times6\times5\times4$ есть результатъ, который получится, когда 7 умножимъ на 6, потомъ полученное произведеніе на 5, далѣе второе произведеніе на 4.

73. Теорема IV.—*Въ произведеніи изъ нѣсколькихъ множителей можно по произволу перемѣнять мѣста множителей.*

Доказательство этой основной теоремы, предложенное уже въ § 42, но единственно только для случая двухъ множителей, состоитъ изъ четырехъ частей:

1°. *Въ произведеніи изъ трехъ множителей можно перемѣнять мѣста двухъ послѣднихъ множителей.*

Я говорю, напримѣръ, что

$$6\times5\times4=6\times4\times5.$$

Дѣйствительно, напишемъ въ одномъ и томъ же горизонтальномъ ряду пять разъ число 6 и повторимъ этотъ рядъ четыре раза, получимъ слѣдующую таблицу:

6, 6, 6, 6, 6,
6, 6, 6, 6, 6,
6, 6, 6, 6, 6,
6, 6, 6, 6, 6.

Сумма чиселъ каждаго горизонтальнаго ряда равна 6×5, а такъ какъ всѣхъ рядовъ четыре, то сумма чиселъ во всей таблицѣ будетъ равна $6\times5\times4$. Но, съ другой стороны, складывая числа одного и того же вертикальнаго ряда, получимъ въ суммѣ 6×4 и, какъ такихъ вертикальныхъ рядовъ пять, то сумма чиселъ всей таблицы равна $6\times4\times5$. Изъ чего и заключаемъ, что

$$6\times5\times4=6\times4\times5;$$

что и требовалось доказать.

2°. *Въ произведеніи изъ нѣсколькихъ множителей можно перемѣнять мѣста послѣднихъ двухъ множителей.*

Я говорю, напримѣръ, что

$$7\times6\times5\times4=7\times6\times4\times5.$$

Дѣйствительно, начало необходимымъ дѣйствій для полунія каждаго изъ этихъ произведеній одинаково. Должно съ одной и съ другой стороны вычислить произведеніе всѣхъ множителей до предпослѣдняго и, какъ эти множители одни

и тѣ же и въ одномъ и томъ же порядкѣ, то и результатъ умноженія получится одинъ и тотъ же. Въ предложенномъ примѣрѣ произведеніе множителей 7 и 6 будетъ 42, слѣдовательно остается доказать равенство

$$42\times5\times4=42\times4\times5;$$

но это непосредственно вытекаетъ изъ первой части нашей теоремы.

3°. *Въ произведеніи изъ нѣсколькихъ множителей можно перемѣнять мѣста двухъ какихъ нибудь послѣдовательныхъ множителей.*

Я говорю, напримѣръ, что

$$7\times6\times5\times4\times3\times2=7\times6\times4\times5\times3\times2.$$

Дѣйствительно, опуская множителей, слѣдующихъ за тѣми, которыхъ мѣста измѣнены, мы по предъидущему получимъ

$$7\times6\times5\times4=7\times6\times4\times5.$$

Эти два произведенія равны и, если мы, какъ одно такъ и другое, умножимъ на 3, а потомъ полученныя произведенія на 2, то результаты будутъ равны; поэтому

$$7\times6\times5\times4\times3\times2=7\times6\times4\times5\times3\times2;$$

что и слѣдовало доказать.

4°. *Въ произведеніи изъ нѣсколькихъ множителей можно по произволу перемѣнять порядокъ множителей.*

Дѣйствительно, разсмотримъ какое нибудь произведеніе, въ которомъ множители написаны въ извѣстномъ порядкѣ. Въ немъ мы можемъ, взявъ какой нибудь множитель, переставить его съ предъидущимъ. Поступая такъ, мы можемъ опять тотъ же множитель подвинуть еще на одно мѣсто и продолжать это до тѣхъ поръ, пока онъ займетъ первое мѣсто. Взявъ потомъ какой нибудь другой изъ множителей, мы и его можемъ послѣдовательно подвигать до тѣхъ поръ, пока онъ не займетъ втораго мѣста, и, продолжая такъ, можно написать множители въ такомъ порядкѣ, въ какомъ пожелаютъ, не перемѣняя величины произведенія.

74. Теорема V.—*Чтобы умножить какое нибудь число на произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей, можно умножить это число на перваго множителя, полученный результатъ на втораго и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока перемножатся всѣ множители.*

Я говорю, напримѣръ, что для умноженія 5 на 24, какъ на произведеніе изъ множителей 2, 3, 4, достаточно умножить 5 на 2, потомъ полученное произведеніе на 3, далѣе

второе произведеніе на 4. Дѣйствительно, мы нашли (§ 42), что

$$5\times24=24\times5;$$

а такъ какъ 24 равно $2\times3\times4$, то можно написать $2\times3\times4\times5$ вмѣсто 24×5; слѣдовательно

$$5\times24=2\times3\times4\times5.$$

Наконецъ въ произведеніи, составляющемъ вторую часть этого равенства, можно переставить множителя 5 на первое мѣсто, тогда получимъ

$$5\times24=5\times2\times3\times4;$$

чѣмъ и будетъ доказана предложенная теорема.

Слѣдствіе. — *Чтобы перемножить два произведенія, достаточно составить одно произведеніе изъ производителей множимаго и множителя.*

Напримѣръ, при умноженіи $5\times6\times7\times8$ на $2\times3\times4$, по предъидущей теоремѣ достаточно множимое умножить на 2, потомъ полученное произведеніе на 3, далѣе это новое произведеніе на 4; почему и будетъ

$$(5\times6\times7\times8)\times(2\times3\times4)=5\times6\times7\times8\times2\times3\times4;$$

а это и требовалось доказать.

75. Теорема VI.—*Въ произведеніи изъ нѣсколькихъ множителей, можно замѣнять какое нибудь число множителей вычисленнымъ ихъ произведеніемъ.*

Я говорю, напримѣръ, что въ произведеніи

$$2\times3\times4\times5\times7\times8$$

позволительно замѣнить три множителя положимъ 3, 5, 8 ихъ произведеніемъ 120. Дѣйствительно, въ предложенномъ произведеніи можно собрать на первыя мѣста множителей 3, 5, 8; другими словами будетъ

$$2\times3\times4\times5\times7\times8=3\times5\times8\times2\times4\times7.$$

Принявъ это, для вычисленія произведенія второй части, начинаютъ составлять произведеніе изъ множителей 3, 5, 8, что дастъ 120; поэтому

$$2\times3\times4\times5\times7\times8=120\times2\times4\times7,$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе.—*Чтобы умножить произведеніе на какое нибудь число, достаточно умножить на это число одного изъ множителей.*

Дѣйствительно, пусть произведеніе

$$5\times3\times4\times5$$

должно умножить на какое нибудь число, положимъ на 10; получимъ новое произведеніе

$$2\times3\times4\times5\times10.$$

Но множителя 10 и какого нибудь другаго, напримѣръ 3, можно замѣнить вычисленнымъ произведеніемъ 30, тогда прежнее произведеніе будетъ равно

$$5\times30\times4\times5,$$

что и требовалось доказать.

Теоремы относящіяся къ дѣленію.

76. Теорема I.—*Если умножить на одно и тоже число дѣлимое и дѣлителя, то частное не измѣнится, а остатокъ умножится на тоже число.*

Положимъ, что дѣлимое будетъ 14 и дѣлитель 4; въ частномъ получится 3 и 2 въ остаткѣ, тогда

$$14=4\times3+2,$$

и говоримъ, если умножить дѣлимое и дѣлитель на одно и тоже число, напримѣръ, на 7, то частное не измѣнится, а остатокъ умножится на 7. Дѣйствительно, если умножимъ обѣ части предъидущаго равенства на 7, то получимъ равные результаты, изъ которыхъ второй получится отъ умноженія суммы на 7, для чего должно будетъ умножить оба ея члена на 7; слѣдовательно

$$14\times7=4\times3\times7+2\times7.$$

Наконецъ въ произведеніи $4\times3\times7$ можно замѣнить множители 4 и 7 ихъ произведеніемъ; тогда

$$14\times7=(4\times7)\times3+2\times7.$$

Но 2 есть остатокъ отъ дѣленія 14 на 4, произведеніе же 2 на 7 менѣе произведенія 4 на 7, а потому, на основаніи послѣдняго равенства, если раздѣлить 14×7 на 4×7, то получается въ частномъ 3, а въ остаткѣ 2×7; чѣмъ и доказывается предложенная теорема.

77. Теорема II.—*Чтобы раздѣлить какое нибудь произведеніе на одного изъ его множителей, должно уничтожить этого множителя.*

Дѣйствительно, положимъ, что желаютъ раздѣлить произведеніе $3\times4\times5$ на 4; предложенное произведеніе тоже что

$$(3\times5)\times4,$$

а потому частное отъ дѣленія его на 4 будетъ 3×5, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе.—*Чтобы раздѣлить произведеніе на какое нибудь число, достаточно раздѣлить одного изъ множителей произведенія на это число, если только дѣленіе будетъ безъ остатка.*

Дѣйствительно, положимъ, что требуется раздѣлить на 4 произведеніе $3\times20\times7$; дѣленіе множителя 20 на 4 будетъ безъ остатка и дастъ въ частномъ 5, поэтому $20=4\times5$ и данное произведеніе (§ 75) будетъ равно

$$3\times4\times5\times7.$$

Но раздѣляя это произведеніе на 4, въ частномъ получимъ

$$3\times5\times7,$$

что и требовалось доказать.

78. Теорема III.—*Чтобы раздѣлить какое нибудь число на произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей, въ случаѣ когда это дѣленіе можетъ быть безъ остатка, достаточно раздѣлить это число на перваго множителя, потомъ полученное частное на втораго и т. д. пока всѣ множители не будутъ употреблены.*

Дѣйствительно, дано раздѣлить 240 на 24, которое есть произведеніе множителей 2, 3, 4. Частное отъ дѣленія числа 240 на 24 будетъ 10; т. е.

$$240=24\times10$$

или

$$240=2\times3\times4\times10.$$

Эти два числа равны, слѣдовательно раздѣляя ихъ на 2 получимъ и частныя равныя, поэтому (§ 77)

$$240:2=3\times4\times10,$$

раздѣляя потомъ на 3, получимъ

$$(240:2):3=4\times10,$$

или, просто безъ скобокъ,

$$240:2:3=4\times10,$$

наконецъ раздѣляя на 4, найдемъ

$$240:2:3:4=10,$$

т. е.

$$240:2:3:4=240:(2\times3\times4);$$

что и требовалось доказать.

О степеняхъ.

79. *Квадратъ* или *вторая степень* какого нибудь числа есть произведеніе двухъ множителей равныхъ этому числу. Такъ 5×5 или 25 есть квадратъ 5, или вторая степень 5.

Кубъ или *третья степень* какого нибудь числа есть произведеніе трехъ множителей равныхъ этому числу. Такъ $5\times5\times5$ или 125 есть *степень* этаго числа. Число этихъ множителей называется *показателемъ степени*.

Чтобы изобразить степень какого нибудь числа, пишутъ это число и надъ нимъ справа показателя степени.

Такъ 5^2 и 5^3 представляютъ квадратъ и кубъ 5, также 5^{13} выражаетъ тринадцатую степень 5.

Согласно этому, можно *первою степенью* числа назвать самое число, тогда показатель ея будетъ равенъ 1; такъ 5^1 все равно что просто 5.

Дѣйствіе, которымъ составляются послѣдовательныя степени какого нибудь числа, называется *возвышеніемъ въ степень*.

Примѣчаніе. Единицы различныхъ порядковъ начиная съ десяти 10, 100, 1000, 10000 и т. д.
суть послѣдовательныя степени основанія 10.

80. Теорема I.—*Произведеніе двухъ или нѣсколькихъ степеней одного и того же числа, есть степень того же числа съ показателемъ равнымъ суммѣ показателей при множителяхъ.*

1° Разсмотримъ сначала двѣ степени, напримѣръ, 5^3 и 5^4; въ произведеніи $5^3\times5^4$, можно замѣнить 5^3 тремя множителямм равными 5, а 5^4 четырьмя множителями равными 5 (§ 74, слѣдствіе), получимъ

$$5^3\times5^4=5\times5\times5\times5\times5\times5\times5=5^{3+4},$$

что и требовалось доказать.

2°. Таже теорема имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда число степеней будетъ болѣе двухъ. Пусть даны три степени 5^3, 5^4, 5^6. Произведеніе двухъ первыхъ множителей есть 5^{3+4}, а умножая это первое произведеніе на третій множитель 5^6, получимъ 5^{3+4+6}.

Слѣдствіе. — *Чтобы степень возвысить въ другую степень, должно умножить показателя первой на показателя второй.*

Дѣйствительно, положимъ, что нужно возвысить 5^4 въ третью степень, т. е.

$$(5^4)^3=5^4\times5^4\times5^4=5^{4+4+4},$$

$$(5^4)^3=5^{4\times3},$$

что и требовалось доказать.

81. Теорема II.—*Частное двухъ степеней одного и того же числа есть степень того числа съ показателемъ равнымъ разности показателей дѣлимаго и дѣлителя.*

Положимъ, напримѣръ, что должно раздѣлить 5^7 на 5^4; разность 7 безъ 4 будетъ 3, имѣемъ (§ 80)

$$5^7=5^4\times5^3,$$

или

$$5^7:5^4=5^3=5^{7-4},$$

что и требовалось доказать.

82. Теорема III. — *Произведеніе возведется въ какую нибудь степень, если каждаго производителя возвести въ ту же степень.*

Положимъ, напримѣръ, что произведеніе $2\times3\times4$ требуется возвести въ третью степень.

Имѣемъ:

$$(2\times3\times4)^3=(2\times3\times4)\times(2\times3\times4)\times(2\times3\times4),$$

или (по § 74)

$$(2\times3\times4)^3=2\times3\times4\times2\times3\times4\times2\times3\times4,$$

или наконецъ (§ 75)

$$(2\times3\times4)^3=2^3\times3^3\times4^3,$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе.—*Если множители произведенія, подлежащаго возвышенію въ степень, суть сами степени, то должно ихъ показателей умножить на показателя степени, въ которую желаютъ возвести произведеніе.*

Положимъ, напримѣръ, что нужно $2\times3^5\times4^7$ возвысить въ кубъ; будетъ

$$(2\times3^5\times4^7)^3=2^3\times(3^5)^3\times(4^7)^3,$$

или (§ 80, слѣдствіе)

$$(2\times3^5\times4^7)^3=2^3\times3^{5\times3}\times4^{7\times3}$$

что и требовалось доказать.

Упражненія.

1) Найти два числа, которыхъ сумма будетъ 239, а разность 75. Вообще доказать, что прикладывая разность двухъ чиселъ къ ихъ суммѣ, получается двойное большее число, а вычитая ту же разность изъ суммы, получается двойное меньшее число.

2) Раздѣлить число 1011 на такія три части, чтобы избытокъ первой надъ второй былъ бы равенъ 136, а второй надъ третьей 88.

3) Какія измѣненія претерпѣваютъ частное и остатокъ какого нибудь дѣленія, если дѣлимое на что нибудь будетъ умножено?

4) Чтобъ раздѣлить какое нибудь число на произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей, должно раздѣлить это число на перваго множителя, потомъ частное на втораго и т. д. до тѣхъ поръ, пока всѣ множители будутъ употреблены. Спрашивается, возможна ли эта теорема и тогда, когда дѣленія будутъ съ остаткомъ?

5) Доказать, что всякое число есть сумма степеней 2, или сумма степеней 2 увеличенная на 1. Разложить, напримѣръ, число 4579 на сумму степеней 2.

6) Доказать, что всякое число есть сумма различныхъ степеней 3, уменьшенная другою суммою различныхъ степеней 3, причемъ одна изъ этихъ суммъ можетъ быть увеличена на единицу. Найти, напримѣръ, суммы степеней 3, разность которыхъ есть 4579.

ГЛАВА II.

ДѢЛИМОСТЬ.

О множителяхъ и дѣлителяхъ чиселъ.—Остатокъ отъ дѣленія числа на 10, на 2, на 5 или на ихъ степени. Условія дѣлимости на этихъ дѣлителей.—Остатокъ дѣленія чиселъ на 9 и на 3. Условія дѣлимости на 9 и на 3.—Остатокъ дѣленія чиселъ на 11. Условія дѣлимости на 11.—Повѣрка чрезъ 9 и чрезъ 11.

О множителяхъ и дѣлителяхъ чиселъ.

83. Когда дѣленіе какого нибудь числа на другое число совершается безъ остатка, то говорятъ, что первое число *дѣлимо* на второе, или, что второе число *дѣлитъ* первое, или есть *дѣлитель* перваго. Напримѣръ, 6 дѣлимо на 3, и 3 дѣлитъ 6, или оно есть дѣлитель для 6.

Кратнымъ какого нибудь числа называютъ произведеніе этого числа на другое какое нибудь число. Такъ 3×2 или 6 есть кратное для 3. Очевидно, что всякое кратное какого нибудь числа дѣлимо на это число, или что тоже — всякое число дѣлимое на другое есть кратное послѣдняго.

Множителемъ или *производителемъ* какого нибудь числа называется то число, для котораго первое будетъ кратнымъ. Напримѣръ, 3 есть множитель или производитель для 6. Очевидно, что слова: *множитель, производитель* и *дѣлитель*, всѣ три, имѣютъ одно и тоже значеніе.

84. Теорема I.—*Всякій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ есть дѣлитель и ихъ суммы.*

Разсмотримъ, напримѣръ, два или нѣсколько чиселъ дѣлящихся на 5. Каждое изъ этихъ чиселъ должно быть составлено изъ частей равняющихся 5, слѣдовательно ихъ сумма должна быть точно также составлена изъ частей

равныхъ 5; стало быть она есть кратное пяти или число дѣлимое на 5.

Слѣдствіе.—*Всякій дѣлитель какого-нибудь числа дѣлитъ и кратныя этого числа.*

Пусть, напримѣръ, 5 есть дѣлитель 15; всякое кратное 15 будетъ суммою нѣсколькихъ чиселъ равныхъ 15, слѣдовательно, по предъидущему оно будетъ дѣлимо на 5.

85. Теорема II.—*Всякій дѣлитель двухъ чиселъ есть дѣлитель и ихъ разности.*

Разсмотримъ, напримѣръ, два числа дѣлящіяся на 5. Каждое изъ этихъ чиселъ будетъ состоять изъ частей равняющихся 5, ихъ разность точно также будетъ состоять изъ частей равняющихся 5; значитъ разность будетъ кратнымъ для 5, или дѣлимо на 5.

Слѣдствіе.—*Всякій дѣлитель двухъ чиселъ дѣлитъ и остатокъ отъ ихъ дѣленія.*

Разсмотримъ два числа дѣлящіяся на 5. Остатокъ отъ дѣленія этихъ чиселъ равенъ разности дѣлимаго и произведенія дѣлителя на частное. Но дѣлитель по предположенію дѣлимъ на 5, произведеніе такого дѣлителя на частное будетъ также дѣлимо; слѣдовательно остатокъ, который есть разность двухъ чиселъ дѣлящихся на 5, будетъ и самъ дѣлиться на 5.

86. Теорема III.—*Остатокъ отъ дѣленія двухъ чиселъ не измѣнится, если прибавить или вычесть изъ дѣлимаго кратное дѣлителя.*

Дѣйствительно, чтобы найти остатокъ дѣленія, должно изъ дѣлимаго вычесть дѣлитель столько разъ, сколько будетъ можно; слѣдовательно, остатокъ не измѣнится, когда мы, предъ началомъ дѣленія, предварительно прибавимъ къ дѣлимому или изъ него вычтемъ нѣсколько разъ дѣлителя.

Примѣчаніе. Эта теорема можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

Если два числа разнятся между собою кратнымъ для третьяго числа и, если какъ первое, такъ и второе изъ нихъ, раздѣлить на это третье, то остатки будутъ равны.

87. Теорема IV.—*Если два числа, дѣлясь на третье, даютъ остатки равныя, то ихъ разность дѣлима на это третье число.*

Разсмотримъ числа 38 и 28. Дѣля, какъ то такъ и другое на 5, получимъ одинъ и тотъ же остатокъ 3; т. е.

38=кратному для 5+3.

28=кратному для 5+3.

Но, чтобы получить разность 38 — 28, можно прежде вычесть изъ нихъ 3, а послѣ останется вычесть одно кратное для 5 изъ другаго кратнаго для 5, изъ чего выходитъ, что разность 38—28 есть кратное для 5.

88. Теорема V.—*Если два числа дѣлятся на одного и того же дѣлителя, то разность между произведеніемъ двухъ дѣлимыхъ и произведеніемъ двухъ остатковъ будетъ дѣлима на дѣлителя.*

Даны два числа 38 и 29. Раздѣлимъ эти числа на одинъ и тотъ же дѣлитель 5, получимъ остатки 3 и 4, поэтому

38=кратному 5+3

29=кратному 5+4.

Такимъ образомъ, каждое изъ чиселъ 38 и 29 состоитъ изъ двухъ частей и, чтобы получить ихъ произведеніе, должно умножить каждую часть первой суммы на каждую часть второй, соединивъ потомъ отдѣльныя произведенія (§ 70). Умножая сначала двѣ части 38 на первую часть 29, которая есть множитель 5, получаютъ два кратныхъ пяти, третье кратное для 5, получится умноживъ первую часть 38 на вторую часть 29, наконецъ, умножая вторую часть 38 на вторую часть 29, получимъ произведеніе 3×4. Слѣдовательно произведеніе 38 на 29 есть сумма четырехъ частей, изъ которыхъ три первыя кратныя для 5, а четвертая равна 3×4; поэтому

38×29=кратному для $5+3\times4$,

а стало быть разность $28\times29-3\times4$ дѣлима на 5.

Слѣдствіе.—*Если три, четыре и т. д. числа дѣлятся на одинъ и тотъ же дѣлитель, то разность между произведеніемъ дѣлимыхъ и произведеніемъ остатковъ дѣлима на того же дѣлителя.*

Разсмотримъ числа 38, 29, 17, которыя, дѣлясь на 5, даютъ соотвѣтственно остатки 3, 4, 2. Мы имѣемъ, что

38=кратному для 5+3,

29=кратному для 5+4,

17=кратному для 5+2.

Перемножая по предъидущему два первыхъ равенства, получимъ

$$38\times29=\text{кратному для } 5+3\times4,$$

а умножая это на слѣдующее

$$17=\text{кратному для } 5+2,$$

получимъ

$$38\times29\times17=\text{кратному для } 5+3\times4\times2;$$

а это доказываетъ, что разность $38\times29\times17-3\times4\times2$ дѣлима на 5.

Тоже разсужденіе приложимо и для четырехъ, пяти и т. д. чиселъ.

Остатки отъ дѣленія чиселъ на 10, на 2, на 5, или на ихъ степени. Условія дѣлимости на этихъ дѣлителей.

89. Весьма часто необходимо бываетъ знать, дѣлится ли одно число на другое, что возможно только тогда, когда мы узнаемъ, что остатка отъ дѣленія перваго числа на второе не будетъ. Большею частію рѣшеніе этого вопроса достигается дѣленіемъ двухъ чиселъ одного на другое; но иногда, въ частныхъ случаяхъ, которые будутъ нами разсмотрѣны, тоже можно сдѣлать быстрѣе. Употребительный способъ для этой цѣли основывается на доказанной нами теоремѣ въ § 86, по которой

Остатокъ отъ дѣленія двухъ чиселъ не измѣняется, когда въ дѣлимомъ будетъ опущено какое нибудь кратное дѣлителя.

90. *Остатки отъ дѣленія какого нибудь числа на 10, на 100, на 1000 и т. д. суть числа, состоящія изъ послѣдней правой цифры того числа, изъ двухъ послѣднихъ правыхъ цифръ, изъ трехъ... и т. д.*

Дѣйствительно, разсмотримъ, напримѣръ, число 78713, мы имѣемъ

$$78713=7871\times10+3$$
$$=787\times100+13$$
$$=78\times1000+713$$
$$\ldots\ldots,$$

а потому остатки получаемые отъ дѣленія 78713 на 10, на 100, на 1000 будутъ 3, 13, 713.

Слѣдовательно:

Чтобы число дѣлилось на 10, 100, 1000 и т. д., оно должно оканчиваться однимъ, двумя, тремя и т. д. нулями.

91. *Остатокъ отъ дѣленія какого нибудь числа на 2 или на 5 будетъ тотъ же, какой и отъ дѣленія цифры единицъ этого числа на 2 или на 5.*

Дано число 78713, имѣемъ

$$78713=7871\times10+3,$$

но 7871×10 есть кратное десяти, стало быть оно кратное для 2 и для 5, ибо $10=2\times5$; поэтому остатокъ отъ дѣленія 78713 на 2 и на 5 будетъ тотъ же, какой получится отъ дѣленія 3 на 2 и на 5.

Число называется четнымъ или нечетнымъ смотря потому, дѣлится оно или не дѣлится на 2. Очевидно, что числа четныя и нечетныя идутъ черезъ число. Изъ этого видно, что

Числа бываютъ четныя или нечетныя смотря потому, будутъ ли ихъ единицы четныя или нечетныя. Нуль разсматривается тутъ какъ цифра четная.

5 есть единственная цифра дѣлящаяся на 5, поэтому ясно, что

Число дѣлится на 5 тогда, когда его единицы изображены цифрою 0 или 5.

92. *Остатокъ отъ дѣленія всякаго числа на 4 или на 25 тотъ же, что и отъ дѣленія на 4 или на 25 числа составленнаго изъ двухъ послѣднихъ справа цифръ перваго числа.*

Дѣйствительно, дано число 78713, имѣемъ

$$78713=787\times100+13;$$

но 787×100 есть кратное 100, стало быть это число кратное для 4 и для 25, ибо $100=4\times25$; слѣдовательно остатокъ отъ дѣленія 78713 на 4 и на 25 тотъ же, что и отъ дѣленія 13 на 4 и на 25.

Такимъ образомъ:

Чтобы число дѣлилось на 4 или на 25 должно, чтобы число, состоящее изъ двухъ послѣднихъ въ немъ справа цифръ, было дѣлимо на 4 или на 25.

93. Вообще, такъ какъ $10=2\times5$, и какъ степени 10 суть $2^2\times5^2$, $2^3\times5^3$, $2^4\times5^4$, и т. д., то подобно предъидущему докажемъ, что:

Остатокъ отъ дѣленія какого нибудь числа на 2^3 или на 5^3, на 2^4 или 5^4 и т. д., т. е. на 8 или на 125, на 16 или 625

и т. д., будетъ тотъ же, что и отъ дѣленія числа составленнаго изъ трехъ, четырехъ, и т. д., послѣднихъ правыхъ цифръ перваго числа.

Остатокъ отъ дѣленія числа на 9 или на 3. Условія дѣлимости на 9 или на 3.

94. Опредѣленіе остатка отъ дѣленія какого нибудь числа на 9 или на 3 основано на слѣдующемъ:

1°. *Единица сопровождаемая однимъ или нѣсколькими нулями равняется кратному девяти увеличенному на* 1.

Дано, напримѣръ, 1000; вычитая 1 изъ этого числа, по обыкновенному правилу вычитанія найдемъ, что остатокъ будетъ выраженъ неиначе какъ цифрою 9. Слѣдовательно остатокъ этотъ будетъ кратнымъ девяти; такимъ образомъ найдемъ:

1000=кратному 9+1.

2°. *Всякое число, изображенное одною значущею цифрою, сопровождаемою однимъ или нѣсколькими нулями, равно кратному девяти увеличенному этою цифрою.*

Дано число 70000. Такъ какъ 10000 равно равному девяти плюсъ единица, поэтому 70000 будетъ равно 7 разъ кратному 9 плюсъ 7, т. е.,

70000=кратному 9+7

3°. *Всякое число равно кратному девяти увеличенному суммою его цифръ.*

Возьмемъ, напримѣръ, число 74852, это число равно 70000+4000+800+50+2; основываясь на предъидущемъ,

70000=кратному 9+7,
4000=кратному 9+4,
800=кратному 9+8,
50=кратному 9+5,
2=кратному 9+2,

поэтому

74852=кратному 9+(7+4+8+5+2);

чѣмъ и доказывается упомянутое свойство.

Примѣчаніе. Такъ какъ 3 есть дѣлитель девяти, то можно также сказать, что

Всякое число равно кратному 3 увеличенному суммою своихъ цифръ.

95. Изъ всего изложеннаго замѣчаемъ, что:

1°. *Остатокъ отъ дѣленія какого нибудь числа на 9 или на 3 тотъ же, что и отъ дѣленія суммы цифръ этого числа на 9 или на 3.*

2°. *Чтобы число дѣлилось на 9 или на 3, нужно чтобы сумма его цифръ дѣлилась на 9 или на 3.*

Примѣчаніе. Въ практикѣ, когда составляютъ сумму цифръ какого нибудь числа, для опредѣленія остатка отъ дѣленія его на 9, каждый разъ, какъ только становится возможно, исключаютъ цифру 9. Дано, напримѣръ, число 74852, говорятъ: 7 и 4....11, 2 и 8....10, 1 и 5....6 и 2... 8; 8 и есть остатокъ отъ дѣленія 74852 на 9.

Остатокъ отъ дѣленія числа на 11. Условіе дѣлимости на 11.

96. Опредѣленіе остатка отъ дѣленія какого нибудь числа на 11 основывается на слѣдующихъ началахъ.

1°. *Единица, сопровождаемая четнымъ числомъ нулей, равна кратному одиннадцати, увеличенному единицею.*

Вычитая единицу изъ подобнаго числа, по обыкновенному правилу вычитанія, увидимъ, что остатокъ будетъ составленъ изъ четнаго числа цифры *девять*; напримѣръ,

$$10000 = 9999 + 1.$$

Но 9999 равно $99 \times 100 + 99$, т. е., равно суммѣ кратныхъ 99, стало быть и самое число есть кратное 99; а потому оно будетъ кратнымъ и одиннадцати, ибо $99 = 11 \times 9$. Изъ этого видно, что

$$10000 = \text{кратному } 11 + 1.$$

2°. *Единица, сопровождаемая нечетнымъ числомъ нулей, равна кратному одиннадцати уменьшенному единицею.*

Предварительно имѣемъ

$$10 = 11 - 1, \text{ или } 10 = \text{кратному } 11 - 1.$$

Разсмотримъ теперь единицу сопровождаемую нечетнымъ числомъ нулей, напримѣръ 100000. Это число равно 10000×10. А такъ какъ 10000 равно кратному 11 увеличенному 1, поэтому 100000 будетъ равно десять разъ кратному $11 + 10$, или 10 разъ кратному $11 + 11 - 1$; поэтому

$$100000 = \text{кратному } 11 - 1.$$

3°. *Число, состоящее изъ значущей цифры, сопровождаемой четнымъ числомъ нулей, равно кратному 11 увеличенному этою цифрою.*

Дано, напримѣръ, 70000. Такъ какъ это число равно 10000×7, а 10000 равно кратному $11+1$, то 70000 будетъ равно 7 разъ кратному $11+7$, почему и имѣемъ, что

70000=кратному $11+7$.

4°. *Число состоящее изъ значущей цифры, сопровождаемой нечетнымъ числомъ нулей, равно кратному 11, уменьшенному этою цифрою.*

Дано число 700000. Такъ какъ 100000 равно кратному $11-1$, 700000 будетъ равно кратному $11-7$ (§ 71): значитъ мы имѣемъ, что

700000=кратному $11-7$.

5°. *Всякое число равно кратному 11, увеличенному суммою цифръ нечетныхъ порядковъ этаго числа начиная справа и уменьшенному суммою цифръ порядковъ четныхъ.*

Дано число 74852, равное $70000+4000+800+50+2$. На основаніи предъидущаго видимъ, что

70000=кратному $11+7$,
4000=кратному $11-4$,
800=кратному $11+8$,
50=кратному $11-5$,
2=. 2;

поэтому

74852=кратному $11+7-4+8-5+2$,

или

74852=кратному $11+(7+8+2)-(4+5)$;

что и требовалось доказать.

97. Изъ предъидущаго выводимъ заключеніе, что:

Остатокъ отъ дѣленія какого нибудь числа на 11 тотъ же, какой и отъ дѣленія на 11 разности между суммою цифръ порядковъ нечетныхъ, начиная справа въ этомъ числѣ, и суммою цифръ порядковъ четныхъ.

Всякій разъ должно наблюдать, что если сумма цифръ порядковъ нечетныхъ менѣе суммы цифръ порядковъ четныхъ, то слѣдуетъ къ первой прибавлять 11, или множить на 11, пока вычитаніе сдѣлается возможнымъ.

Примѣръ.—1°. Дано число 74852; имѣемъ

74852=кратному $11+17-9$,
=кратному $11+8$;

8 есть остатокъ отъ дѣленія 74852 на 11.

2°. Дано число 728192; имѣемъ

728192=кратному 11+5—24,

=кратному 11+(22+5)—24,

=кратному 11+3;

3 есть остатокъ отъ дѣленія числа 728192 на 11.

Очевидно поэтому:

Чтобы число дѣлилось на 11, должно и достаточно, чтобы сумма цифръ порядковъ нечетныхъ была равна суммѣ цифръ порядковъ четныхъ, или лучше, чтобы разность этихъ двухъ суммъ дѣлилась на 11.

Повѣрка посредствомъ 9 и 11.

98. Какъ на приложеніе предшествовавшихъ правилъ, мы укажемъ на способъ дѣлать повѣрку четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій *чрезъ какой нибудь дѣлитель.* Но для этой цѣли употребляются только дѣлители 9 и 11, потому что остатки отъ дѣленія чиселъ на 9 и на 11 получаются легче. Разсмотримъ сначала употребленіе 9, а потомъ, какъ сказали, распространимъ это на 11 и на другіе дѣлители.

Сложеніе.—*Чтобы сдѣлать повѣрку сложенія нѣсколькихъ чиселъ цифрою 9, складываютъ остатки отъ дѣленія этихъ чиселъ на 9 и если результатъ будетъ равенъ остатку отъ дѣленія полученной суммы на 9, или разнствовать только кратнымъ 9, то этимъ повѣрится точность перваго вычисленія.*

Положимъ, что мы складывали числа 9507, 939, 5028 и получили сумму 15474. Остатки отъ дѣленія данныхъ чиселъ на 9 суть 3, 3, 6; сумма ихъ 12; т. е.

9507=кратному 9+3,

939=кратному 9+3,

5028=кратному 9+6;

стало быть,

9507+939+5028=кратному 9+12.

Съ другой стороны, остатокъ отъ дѣленія полученной суммы 15474 на 9 есть 3, т. е.

15474=кратному 9+3;

слѣдовательно, если 15474 есть дѣйствительная сумма данныхъ чиселъ, то числа 12 и 3, могутъ разниться только кратнымъ 9. А такъ какъ 12=3+9, то значитъ сложеніе было сдѣлано вѣрно.

Вычитаніе.—*Чтобы сдѣлать повѣрку вычитанія чрезъ цифру 9, складываютъ остатки отъ дѣленія на 9 меньшаго числа и полученной разности, и если результатъ будетъ равенъ остатку отъ дѣленія большаго числа на 9, или только разнится отъ него кратнымъ 9, то первое вычисленіе сдѣлано вѣрно.*

При вычитаніи тоже самое будетъ, если большее число сравнить съ суммою меньшаго числа сложеннаго съ разностію.

Положимъ вычиталось 176382 изъ 205634 и получился остатокъ 29252.

Остатокъ отъ дѣленія бо́льшаго числа на 9 есть 2, остатки отъ дѣленія меньшаго числа и разности на 9 суть 0 и 2; слѣдовательно вычисленіе сдѣлано вѣрно.

99. Умноженіе.—*Чтобы повѣрить умноженіе цифрою 9, перемножаютъ остатки отъ дѣленія на 9 данныхъ множителей, и если результатъ будетъ равенъ остатку отъ дѣленія на 9 полученнаго произведенія, или разнится съ нимъ только кратнымъ 9, то первое вычисленіе сдѣлано вѣрно.*

Это непосредственно основывается на теоремѣ доказанной въ § 88.

Положимъ, что умножалось 2096 на 347 и получено произведеніе 727312. Остатки отъ дѣленія данныхъ множителей на 9 будутъ 8 и 5, а потому (§ 88) имѣемъ

$$2096\times347=\text{кратному } 9+8\times5;$$

съ другой стороны, остатокъ отъ дѣленія на 9 произведенія будетъ 4, т. е.,

$$727312=\text{кратному } 9+4.$$

Слѣдовательно, если 727312 есть дѣйствительное произведеніе 2096 на 347, то числа 8×5 и 4 не могутъ иначе разнствовать, какъ только кратнымъ 9. А такъ какъ 8×5 равно 40, а 40—4 даетъ разность 36 кратную 9, то дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

Примѣчаніе.—Предъидущее правило приложимо всегда, какое бы ни было число множителей, произведеніе которыхъ желаютъ повѣрить.

100. Дѣленіе.—*Чтобы посредствомъ 9 повѣрить дѣленіе, перемножаютъ остатки отъ дѣленія на 9 дѣлителя и частнаго и придаютъ остатокъ отъ дѣленія на 9 остатка; и если результатъ получится равный остатку отъ дѣленія дѣлимаго на 9, или будетъ разнствовать съ послѣднимъ только кратнымъ 9, то это удостовѣритъ въ правильности вычисленія.*

Положимъ, напримѣръ, что дѣлилось 590549 на 859 и получено въ частномъ 687 и 416 въ остаткѣ.

Остатки отъ дѣленія на 9 трехъ чиселъ 859, 687, 416 будутъ 4, 3, 2; имѣемъ

$$859 \times 687 = \text{кратному } 9 + 4 \times 3,$$

$$416 = \text{кратному } 9 + 2;$$

стало быть,

$$859 \times 687 + 416 = \text{кратному } 9 + 4 \times 3 + 2.$$

Съ другой стороны, остатокъ отъ дѣленія на 9 дѣлимаго 590549 есть 5, т. е.

$$590549 = \text{кратному } 9 + 5.$$

Но если дѣленіе сдѣлано вѣрно, то 590549 равно $859 \times 687 + 416$ и тогда числа 5 и $4 \times 3 + 2$ могутъ разноствовать только кратнымъ 9; а такъ какъ разность этихъ чиселъ равна 9, то дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

101. Повѣривъ какое-нибудь дѣйствіе цифрою 9, нельзя еще заключить съ достовѣрностію, что найденный результатъ есть точный, но мы только въ правѣ утверждать, что сдѣланная ошибка, если таковая имѣется, есть число кратное 9. Если же при повѣркѣ на 9 и въ тоже время на 11, ошибки не обнаружится, хотя таковая и будетъ, то она должна быть числомъ кратнымъ 9 и кратнымъ 11.

Упражненія.

1) Доказать, что если число дѣлимо на 4, то сумма цифры единицъ съ двойною цифрою десятковъ дѣлимо на 4, и обратно.

2) Доказать, что если число дѣлимо на 8, то сумма цифры единицъ съ двойною цифрою десятковъ и съ четверною цифрою сотенъ дѣлима на 8, и обратно.

3) Доказать, что если число дѣлимо на 6, то сумма цифры единицъ съ четверными цифрами каждаго изъ прочихъ порядковъ дѣлима на 6, и обратно.

4) Доказать слѣдующее правило:

Чтобы получить остатокъ отъ дѣленія числа на 37, раздѣляютъ число на грани въ три цифры, начиная справа (послѣдняя лѣвая грань можетъ быть въ одну или въ двѣ

цифры); далѣе, берутъ сумму чиселъ составляющихъ эти грани и находятъ остатокъ отъ дѣленія этой суммы на 37.

Основаніе доказательству то, что 1000 есть кратное 37 увеличенное единицею.

5) Доказать слѣдующее правило:

Чтобы получить остатокъ отъ дѣленія числа на 7 или на 13 должно: 1-е раздѣлить число на грани, въ три цифры каждая, начиная справа; 2-е взять сумму чиселъ, составляющихъ грани четныхъ мѣстъ; 3-е вычесть вторую сумму изъ первой, увеличивая, если будетъ нужно послѣднюю кратнымъ 7 или 13; 4-е по найденной разности отыскать остатокъ отъ дѣленія ея на 7 или на 13.

Основаніе доказательству то, что 1000 есть кратное 7 или 13 уменьшенное единицею.

6) Доказать, что ошибка случившаяся при умноженіи двухъ чиселъ и происшедшая отъ того, что правая цифра одного изъ отдѣльныхъ произведеній не была подписана подъ второю справа цифрою предъидущаго произведенія, не можетъ быть обнаружена чрезъ повѣрку цифрою 9. Изслѣдовать, можно ли обнаружить эту ошибку повѣркою чрезъ 11.

ГЛАВА III.

ТЕОРІИ ОБЩАГО НАИБОЛЬШАГО ДѢЛИТЕЛЯ И НАИМЕНЬШАГО КРАТНАГО ЧИСЛА.

Теоремы, на которыхъ основано нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ чиселъ. — Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ чиселъ. — Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя для нѣсколькихъ чиселъ. — Теоремы относящіяся къ теоріи общаго наибольшаго дѣлителя. — Предѣлъ числа дѣленій, получающихся при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя. — Нахожденіе наименьшаго общаго кратнаго числа для двухъ чиселъ. — Нахожденіе наименьшаго общаго кратнаго числа для нѣсколькихъ чиселъ.

Теоремы, на которыхъ основано нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя.

102. Опредѣленіе общаго наибольшаго дѣлителя заключается въ слѣдующихъ двухъ теоремахъ:

Теорема I.—*Если два числа дѣлятся одно на другое, то ихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ наименьшему изъ нихъ.*

Общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ не можетъ превышать меньшее изъ нихъ, потому что онъ долженъ дѣлить ихъ. Если меньшее число дѣлитъ большее, то оно раздѣлится и само на себя, и потому будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.

Теорема II.—*Если два числа не дѣлятся одно на другое, то ихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ общему наибольшему дѣлителю для меньшаго изъ нихъ и для остатка отъ ихъ дѣленія.*

Даны два числа 852 и 192. Раздѣляя одно на другое находимъ для частнаго 4 и для остатка 84; поэтому

$$852=192\times4+84.$$

Всякій общій дѣлитель чиселъ 852 и 192 дѣлитъ и остатокъ отъ ихъ дѣленія 84 (§ 84, *слѣдствіе*); поэтому онъ будетъ общимъ дѣлителемъ для 192 и 84.

Обратно, всякій общій дѣлитель чиселъ 192 и 84 раздѣлитъ и 192×4; дѣля 192×4 и 84 будетъ дѣлить и ихъ сумму 852, а потому такое число есть общій наибольшій дѣлитель 852 и 192.

Основываясь на томъ, что 852 и 192 имѣютъ одного и того же общаго дѣлителя какъ и 192 и 84, получаемъ, какъ частный случай, что общій наибольшій дѣлитель для 852 и 192 равенъ общему наибольшему дѣлителю для 192 и 84.

Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ чиселъ.

103. Предложимъ себѣ найдти общаго наибольшаго дѣлителя для 852 и 192. Дѣля 852 на 192 мы найдемъ въ частномъ 4 и въ остаткѣ 84. Изъ этого заключаемъ, что искомый общій наибольшій дѣлитель не 192, но что онъ равенъ общему наибольшему дѣлителю для 192 и 84. Тогда дѣлимъ 192 на 84, получимъ въ частномъ 2 и въ остаткѣ 24; поэтому искомый общій наибольшій дѣлитель будетъ не 84, но равенъ общему наибольшему дѣлителю для 84 и 24. Дѣлимъ 84 на 24, получаемъ въ частномъ 3, а въ остаткѣ 12 и заключаемъ, что искомый общій наибольшій дѣлитель будетъ равенъ общему наибольшему дѣлителю для 24 и 12. Наконецъ, такъ какъ раздѣливъ 24 на 12, получаемъ въ частномъ 2, а въ остаткѣ 0, то найдемъ, что искомый общій наибольшій дѣлитель есть 12.

Обыкновенно дѣйствіе располагаютъ такимъ образомъ

		4	2	3	2
852	192	84	24	12	
84	24	12	0		

Очевидно, что каждое дѣленіе производится по обыкновенному способу съ тою только разницею, что частное пишется сверху вмѣсто того, чтобы помѣщаться ему подъ дѣлителемъ.

104. Изъ предъидущаго можно вывести слѣдующее правило:

Чтобы имѣть общій наибольшій дѣлитель для двухъ чиселъ, большее число дѣлятъ на меньшее; если при этомъ остатокъ будетъ нуль, то меньшее число будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ. Въ противномъ случаѣ, меньшее число дѣлятъ на первый

остатокъ и такимъ образомъ получаютъ второй остатокъ. Если онъ будетъ нуль, то первый остатокъ будетъ искомымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ. Въ противномъ случаѣ, дѣлятъ первый остатокъ на второй и продолжаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока получится въ остаткѣ нуль; тогда остатокъ предшествующій нулевому будетъ искомымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.

Примѣчаніе I.—Руководствуясь предъидущимъ правиломъ, нельзя не достичь нулеваго остатка, ибо остатки идутъ уменьшаясь; слѣдовательно число ихъ необходимо должно имѣть предѣлъ.

Примѣчаніе II.—*Всякій дѣлитель общій двумъ числамъ дѣлитъ и ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.*

Напримѣръ, всякій общій дѣлитель чиселъ 852 и 192 раздѣлитъ и остатокъ отъ ихъ дѣленія 84 (§ 85); дѣля 192 и 84 онъ раздѣлитъ и остатокъ отъ ихъ дѣленія 24. Точно также раздѣляя 84 и 24, онъ будетъ дѣлить и остатокъ отъ ихъ дѣленія 12, т. е. общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 852 и 192.

Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя для нѣсколькихъ чиселъ.

103. Теорема.—*Когда будетъ нѣсколько данныхъ чиселъ, то если найдти общаго наибольшаго дѣлителя сначала для двухъ изъ нихъ, а потомъ общаго наибольшаго дѣлителя для числа полученнаго такимъ образомъ и одного изъ данныхъ, не бывшихъ въ употребленіи и т. д., то получится общій наибольшій дѣлитель для всѣхъ данныхъ чиселъ.*

Даны, напримѣръ, четыре числа.

852, 192, 42, 27;

общій наибольшій дѣлитель для 852 и 192 есть 12; тогда я говорю, что общій наибольшій дѣлитель для чиселъ

12, 42, 27,

будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ и для данныхъ чиселъ.

Въ самомъ дѣлѣ, всякій общій дѣлитель четырехъ данныхъ чиселъ, дѣлящій отдѣльно 852 и 192, дѣлитъ и ихъ общаго наибольшаго дѣлителя 12; а потому это число будетъ также общимъ дѣлителемъ для чиселъ 12, 42, 27. Наоборотъ, всякій общій дѣлитель чиселъ 12, 42, 27, дѣлящій

и 12, дѣлитъ 852 и 192 кратныя для 12; стало быть онъ будетъ дѣлителемъ и данныхъ чиселъ.

Такимъ образомъ числа 852, 192, 42, 27 имѣютъ тѣхъ же общихъ дѣлителей, что и числа 12, 42, 27; слѣдовательно общій наибольшій дѣлитель для однихъ, будетъ равенъ общему наибольшему дѣлителю и для другихъ.

106. Теперь мы можемъ безъ затрудненія находить общаго наибольшаго дѣлителя для нѣсколькихъ чиселъ. Пусть даны четыре числа

852, 192, 42, 27,

которыя уже разсматривались. Начинаемъ съ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя для 852 и 192, найдемъ 12; тогда вопросъ сведется на отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя для трехъ чиселъ:

12, 42, 27.

Находимъ также общаго наибольшаго дѣлителя для чиселъ 12 и 42, получимъ 6, и, такимъ образомъ, останется найти общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ чиселъ:

6, 27.

Находимъ, что онъ равенъ 3. Стало быть общій наибольшій дѣлитель для предложенныхъ чиселъ будетъ 3.

Послѣ того мы можемъ составить себѣ слѣдующее правило: *Чтобы получить общаго наибольшаго дѣлителя для нѣсколькихъ чиселъ, находятъ общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ первыхъ; потомъ общаго наибольшаго дѣлителя для полученнаго числа и третьяго изъ данныхъ чиселъ, и такъ дѣйствуютъ до тѣхъ поръ, пока всѣ данныя числа будутъ употреблены. Послѣдній полученный общій наибольшій дѣлитель будетъ таковымъ же дѣлителемъ и для предложенныхъ чиселъ.*

Примѣчаніе.—Всякій общій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ дѣлитъ и ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Напримѣръ, всякій общій дѣлитель 852, 192, 42, 27 дѣлитъ и 12, общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 852 и 192 (§ 104, примѣч. II); поэтому онъ есть общій дѣлитель и для 12, 42, 27. По той же причинѣ онъ дѣлитъ и 6 общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 12 и 42, стало быть онъ есть общій дѣлитель для 6 и 27; а слѣдовательно онъ дѣлитъ и ихъ общаго наибольшаго дѣлителя 3, который также есть общій наибольшій дѣлитель и для предложенныхъ чиселъ.

107. Два или нѣсколько чиселъ называются первыми между собою, когда они кромѣ единицы не имѣютъ другаго общаго дѣлителя; другими словами, когда ихъ общій наибольшій дѣлитель есть 1.

Когда ищется общій наибольшій дѣлитель для двухъ чиселъ и при вычисленіи встрѣтятся два послѣдовательныхъ остатка, видимо между собою первыхъ, то послѣ того продолжать дѣйствіе безполезно, потому что и предложенныя числа суть также первыя между собою и ихъ общій наибольшій дѣлитель будетъ тотъ же, что и для тѣхъ двухъ остатковъ.

Точно также, если при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя, болѣе чѣмъ для двухъ чиселъ, получатъ два послѣдовательныхъ дѣлителя первыхъ между собою, то вычисленіе продолжать также безполезно, потому что и данныя числа будутъ также первыми между собою.

Теоремы относящіяся къ теоріи общаго наибольшаго дѣлителя.

108. Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ часто употреблять буквы A, B,. ..a, b,.... для обозначенія чиселъ. Часто также мы будемъ брать одну и ту же букву, сначала безъ значка, а потомъ отличая ее однимъ или нѣсколькими значками; такъ, напримѣръ, A, A′, A″, A‴,.... выговаривая A, A *примъ*, A *два*, A *три*,..... Мы употребляемъ это послѣднее *знакоположеніе* въ особенности для обозначенія двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, имѣющихъ какое нибудь общее свойство, или одинаковый способъ своего составленія, который мы желаемъ разсмотрѣть.

Когда два или нѣсколько чиселъ будутъ такимъ образомъ изображены буквами, то произведеніе ихъ мы обозначаемъ тѣмъ, что просто пишемъ эти буквы послѣдовательно одну за другою, выпуская знакъ × умноженія. Такъ AB представляетъ собою произведеніе чиселъ обозначенныхъ чрезъ A и B; ABC—произведеніе чиселъ A, B, C. Точно также произведеніе A на 12 пишемъ 12 A.

109. Теорема I.—*Когда два или нѣсколько чиселъ будутъ умножены на одно и тоже число, то на это же число умножится и ихъ общій наибольшій дѣлитель.*

1°. Возьмемъ прежде два числа A и B и, для ясности, положимъ, что при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя для этихъ чиселъ было сдѣлано четыре дѣленія и что четвертый остатокъ равенъ нулю. Пусть R будетъ остатокъ отъ дѣленія A на B, R′ остатокъ отъ дѣленія B на R и R″ остатокъ отъ дѣленія R на R′. По нашему предположенію остатокъ отъ дѣленія R′ на R″ есть нуль, поэтому R″ есть общій наибольшій дѣлитель для A и B.

Теперь, если умножить A и B на какое нибудь извѣстное число N, то остатокъ отъ ихъ дѣленія R тоже умножится на это число (§ 76). Если B и R будутъ такимъ образомъ умножены на N, то и остатокъ R′ отъ ихъ дѣленія тоже умножится на N. Наконецъ точно также, если R и R′ будутъ умножены на N, то и остатокъ отъ ихъ дѣленія R″, который есть общій наибольшій дѣлитель для A и B, будетъ тоже умноженъ на N.

2°. Разсмотримъ теперь случай для нѣсколькихъ чиселъ Возьмемъ для примѣра четыре числа A, B, C, D. Пусть δ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ для A и B, δ' общимъ наибольшимъ дѣлителемъ для δ и C, и δ'' общимъ наибольшимъ дѣлителемъ для δ' и D. Мы знаемъ, что δ'' будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ для четырехъ чиселъ A, B, C, D.

Теперь умножимъ A, B, C, D на одно и тоже число N. Если A и B умножены на N, то и ихъ общій наибольшій дѣлитель δ будетъ умноженъ на N; если δ и C умножены на N, то ихъ общій наибольшій дѣлитель δ' также будетъ умноженъ на N; наконецъ, δ' и D, будучи умножены на N, требуютъ, чтобы δ'' общій наибольшій дѣлитель для нихъ и для предложенныхъ чиселъ, былъ бы также умноженъ на N.

Слѣдствіе.—*Если два или нѣсколько чиселъ раздѣлить на одно и тоже число, то и общій наибольшій дѣлитель тѣхъ чиселъ раздѣлится на тоже число.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ для примѣра четыре числа

NA, NB, NC, ND,

дѣлящіяся на одно и тоже число N. Также пусть δ будетъ общій наибольшій дѣлитель чиселъ A, B, C, D; тогда по предъидущему Nδ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ. И очевидно, что если раздѣлить на N четыре данныхъ числа, то и ихъ общій наибольшій дѣлитель также раздѣлится на N.

Примѣчаніе.—Это слѣдствіе дозволяетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ упрощать отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя для нѣсколькихъ чиселъ. Дѣйствительно, если данныя числа будутъ имѣть общаго множителя N, то раздѣляя ихъ на N, отыскиваютъ общаго наибольшаго дѣлителя для полученныхъ чиселъ. Потомъ, умноживъ результатъ на N, получаютъ общаго наибольшаго дѣлителя для данныхъ чиселъ.

Примѣръ.—Желаютъ получить общій наибольшій дѣлитель для чиселъ 85200 и 19200. Ищутъ его для 852 и 192 и получаютъ 12; стало быть, искомый общій наибольшій дѣлитель будетъ 1200.

110. Теорема II.—*Если два или нѣсколько чиселъ раздѣлить на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, то полученныя частныя будутъ первыми между собою.*

Возьмемъ, напримѣръ, три числа A, B, C; A′, B′, C′ пусть будетъ частныя отъ дѣленія A, B, C на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя D.

Но, по слѣдствію теоремы I, если раздѣлимъ A, B, C на D, то и ихъ общій наибольшій дѣлитель D раздѣлится на D, стало быть получится равнымъ 1; поэтому числа A′, B′, C′ будутъ первыми между собою.

111. Теорема III.—*Обратно, если мы раздѣлимъ два или нѣсколько чиселъ на одного изъ ихъ общихъ дѣлителей, и получимъ частныя первыя между собою, то принятый дѣлитель будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ для данныхъ чиселъ.*

Возьмемъ, напримѣръ, три числа A, B, C и предположимъ что частныя A′, B′, C′, полученныя отъ дѣленія данныхъ чиселъ на ихъ общаго дѣлителя D, будутъ первыми между собою, т. е. что ихъ общій наибольшій дѣлитель будетъ равенъ единицѣ.

Если умножить A′, B′, C′ на D, то получатся произведенія A, B, C, а для общаго наибольшаго дѣлителя $1 \times D$ или D; что и требовалось доказать.

112. Теорема IV.—*Всякое число которое дѣлитъ произведеніе двухъ множителей и будетъ первымъ съ однимъ изъ нихъ, раздѣлитъ другой.*

Я говорю, что если N дѣлить AB и будетъ первымъ съ A, то оно раздѣлитъ B. Дѣйствительно, общій наибольшій дѣлитель чиселъ A и N есть 1, произведенія N и A на B будутъ

NB и AB,

и для нихъ общій наибольшій дѣлитель будетъ B. Но по предположенію, N дѣлитъ произведеніе AB и дѣлитъ тоже NB, поэтому оно раздѣлитъ и общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ NB и AB т. е. B.

Предѣлъ числа дѣленій, получающихся при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ чиселъ.

113. Теорема I.—*При всякомъ дѣленіи дѣлимое болье двойнаго остатка.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ два числа A и B<A, Q частное и R остатокъ отъ ихъ дѣленія; тогда

$$A=BQ+R.$$

Если частное Q по меньшей мѣрѣ будетъ равно 1, то A по меньшей мѣрѣ будетъ равно B+R и наконецъ, такъ какъ дѣлитель необходимо долженъ быть болѣе остатка, то имѣемъ

$$A>R+R \text{ или } A>2R;$$

что и требовалось доказать.

Теорема II.—*Если при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ A и B<A придется произвести болье какого нибудь четнаго числа* 2n *дѣленій, то меньшее изъ данныхъ чиселъ B будетъ превышать* n-*ую степень* 2, *или* 2^n.

Дѣйствительно, пусть

$$R, R', R'', R''', R^{IV}, R^{V}, R^{VI},\ldots$$

будутъ остатки при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя для чиселъ A и B. По теоремѣ I имѣемъ

$$B>2R';$$

точно также

$$R'>2R'';$$

вставляя получимъ

$$B>2\times 2R''' \text{ или } B>2^2R'''.$$

Также по причинѣ, что $R'''>2R^{V}$, мы имѣемъ

$$B>2^2\times 2R^{V} \text{ или } B>2^3R^{V}.$$

Продолжая такимъ образомъ, конечно увидимъ, что B будетъ болѣе произведенія n-*ой* степени $2^{-ой}$ на остатокъ, занимающій мѣсто 2n-*аго* порядка. Но мы предположили, что этотъ остатокъ не будетъ нулевымъ, ибо для нашей цѣли слѣдовало сдѣлать болѣе 2n дѣленій; стало быть, по меньшей мѣрѣ, можно положить его равнымъ 1,—а потому

B будетъ превышать n-ую степень 2; что и требовалось доказать.

Слѣдствіе.— *Число дѣленій, производимыхъ при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ чиселъ, по большей мѣрѣ, равно двойному показателю степени 2, непосредственно превышающей меньшее изъ данныхъ чиселъ.*

Такъ какъ A и B>A суть два данныя числа и 2n>B, то невозможно по предъидущей теоремѣ, чтобы число дѣленій было болѣе 2n.

Приложимъ это правило къ двумъ числамъ 377 и 233. Для этой цѣли составимъ степени 2 до тѣхъ поръ, пока получимъ степень превышающую 233; эти степени суть:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

Восьмая степень 2, 256 превышаетъ 233, и видимъ, что наше правило указываетъ на предѣлъ 16 для числа будущихъ дѣленій. Производя вычисленіе, найдемъ, что число дѣленій равно 12.

Нахожденіе наименьшаго общаго кратнаго числа для двухъ чиселъ.

114. Теорема.— *Наименьшее общее кратное двухъ чиселъ равно произведенію, которое получится, перемножая общаго наибольшаго дѣлителя данныхъ чиселъ на частныя отъ дѣленія этихъ чиселъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.*

Дѣйствительно, возьмемъ два числа A и B, D ихъ общій наибольшій дѣлитель, A′ и B′ частныя отъ дѣленія A и B на D; тогда имѣемъ

$$A=DA',\ B=DB'.$$

Пусть общее кратное для A и B будетъ M.

M будучи кратнымъ A, равно произведенію A на какое нибудь извѣстное число Q, тогда M=AQ, но какъ A=DA′, то

$$M=DA'Q.$$

Съ другой стороны, такъ какъ M есть кратное для B или DB′, то дѣленіе DA′Q на DB′ будетъ безъ остатка. Чтобы исполнить это дѣленіе, то (§ 78) можно прежде раздѣлить DA′Q на D, а потомъ частное A′Q на B′. Но B′ будучи первымъ съ A′, при дѣленіи A′Q должно раздѣлить Q (§ 112); поэтому Q есть произведеніе B′ на какое нибудь извѣстное число q; т. е., имѣемъ Q=B′q и слѣдовательно

$$M=DA'B'q.$$

Обратно, число DA′B′q есть общее кратное для A и B. Оно равно DA′×B′q или DB′×A′q. Замѣняя q послѣдовательно числами 1, 2, 3 и т. д., мы получимъ рядъ общихъ кратныхъ для A и B; они суть

DA′B′, 2DA′B′, 3DA′B′,....

Но наименьшее между ними есть DA′B′, что и доказываетъ предложенную теорему.

Примѣчаніе I.—Въ произведеніи DA′B′ множители D и A′ можно замѣнить ихъ произведеніемъ A, или множители D и B′ ихъ произведеніемъ B; слѣдовательно наименьшее общее кратное число для A и B есть AB′ или BA′.

Изъ этого заключаемъ:

Чтобы найти наименьшее общее кратное число для двухъ чиселъ, должно отыскать общій наибольшій дѣлитель для этихъ чиселъ, раздѣлить одно изъ нихъ на него и на полученное частное умножить другое число.

Если два числа A и B будутъ числа первыя между собою, то очевидно, что ихъ наименьшее кратное есть произведеніе этихъ чиселъ.

Примѣчаніе II.—Доказательство предъидущей теоремы указываетъ также и на то, что общее кратное двухъ чиселъ есть кратное и для ихъ наименьшаго общаго кратнаго числа.

Нахожденіе наименьшаго общаго кратнаго числа болѣе чѣмъ для двухъ чиселъ.

115. Теорема.—*Дано нѣсколько чиселъ; если мы возьмемъ наименьшее кратное для двухъ изъ нихъ, потомъ наименьшее кратное для числа полученнаго и для того изъ данныхъ чиселъ, которое еще не было взято и т. д., то получимъ наименьшее кратное число для всѣхъ данныхъ чиселъ.*

Напримѣръ, даны четыре числа

A, B, C, D

и M наименьшее общее кратное для первыхъ двухъ; я говорю, что наименьшее кратное чиселъ

M, C, D

будетъ наименьшимъ общимъ кратнымъ и данныхъ чиселъ.

Дѣйствительно, всякое общее кратное чиселъ A, B, C, D, будучи кратнымъ для A и B, будетъ также кратнымъ и

для ихъ наименьшаго кратнаго числа M, т. е. общее кратное числамъ M, C, D. Обратно, всякое общее кратное для чиселъ M, C, D, будучи кратнымъ для M, есть кратное для A и для B, которыя есть дѣлители для M, поэтому оно будетъ общимъ кратнымъ для A, B, C, D.

Такимъ образомъ числа A, B, C, D и M, C, D имѣютъ одни и тѣ же общія кратныя, поэтому наименьшее общее кратное для однихъ будетъ также наименьшимъ общимъ кратнымъ и для другихъ.

116. Теперь уже легко найти наименьшее общее кратное число болѣе чѣмъ для двухъ чиселъ. Возьмемъ, напримѣръ, числа

A, B, C, D.

Найдемъ наименьшее общее кратное M для чиселъ A и B; мы тогда приведемъ вопросъ къ отысканію наименьшаго общаго кратнаго числа только для трехъ чиселъ

M, C, D.

Пусть M′ будетъ наименьшее общее кратное для M и C, тогда придется находить наименьшее общее кратное только для

M′ и D,

которое и будетъ искомымъ числомъ.

Послѣ того можно составить слѣдующее правило:

Чтобы получить наименьшее общее кратное для нѣсколькихъ чиселъ, ищутъ прежде наименьшее общее кратное для двухъ первыхъ, потомъ наименьшее общее кратное для числа полученнаго и для третьяго изъ данныхъ и т. д. до тѣхъ поръ, пока переберутъ всѣ числа. Послѣднее наименьшее общее кратное, полученное такимъ способомъ, будетъ искомымъ числомъ для предложенныхъ чиселъ.

Примѣчаніе. — *Всякое общее кратное для нѣсколькихъ чиселъ будетъ кратнымъ и ихъ наименьшему общему кратному числу.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A, B, C, D будутъ данныя числа, M наименьшее общее кратное для чиселъ A и B; M′ тоже для чиселъ M и C; M″ для M′ и D. Всякое общее кратное числамъ A, B, C, D есть общее кратное и для M, C, D, (§ 114, прим. II); оно также будетъ общимъ кратнымъ и для M′ и D; наконецъ, по той же причинѣ, оно будетъ кратнымъ и для M″.

Упражненія.

1) Доказать, что общій наибольшій дѣлитель для двухъ чиселъ не измѣнится, когда мы раздѣлимъ одно изъ нихъ на какой нибудь изъ его дѣлителей, только бы этотъ дѣлитель былъ первымъ съ другимъ числомъ.

2) Доказать, что для полученія общаго наибольшаго дѣлителя тремъ числамъ A, B, C, достаточно отыскать общаго наибольшаго дѣлителя δ для A и C, потомъ общаго наибольшаго дѣлителя δ' для B и C, и наконецъ общаго наибольшаго дѣлителя для δ и δ'.

3) Доказать, что общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ A и B равенъ числу кратныхъ B, заключающихся въ слѣдующемъ ряду:

$$A,\ A\times 2,\ A\times 3,\ldots A\times B.$$

4) Доказать, что если раздѣлить наименьшее общее кратное число для нѣсколькихъ чиселъ на каждое изъ этихъ чиселъ, то полученныя частныя будутъ первыя между собою.

5) Доказать, что для полученія наименьшаго общаго кратнаго числа для трехъ чиселъ A, B, C, достаточно отыскать наименьшее общее кратное M для A и для C, потомъ наименьшее общее кратное M′ для B и C, наконецъ наименьшее общее кратное для чиселъ M и M′.

6) Возьмемъ число N составленное изъ m цифръ 9, и A число составленное изъ m или изъ меньшаго числа произвольныхъ цифръ. (Если A будетъ имѣть менѣе m цифръ, то приписавъ справа къ нему одинъ или нѣсколько нулей, мы можемъ число цифръ дополнить до m.) Пусть A′ будетъ число происшедшее отъ того, что въ числѣ A мы первую лѣвую цифру переставили направо; A″ получено также отъ перестановки первой лѣвой цифры въ A′ направо, и т. д. Требуется доказать, что всякій общій дѣлитель чиселъ N и A будетъ также дѣлить A′, A″ и проч.

Напримѣръ, 7 дѣлитъ 999999 и 247947, также дѣлитъ и пять чиселъ: 479472, 794724, 947247, 472479, 724794.

ГЛАВА IV.

ТЕОРІЯ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Первоначальныя числа.—Составленіе таблицы первоначальныхъ чиселъ.—Таблица первоначальныхъ чиселъ до 1229.—Свойства относящіяся къ теоріи первоначальныхъ чиселъ.—Разложеніе числа на первоначальныхъ множителей.—Нахожденіе дѣлителей для числа.—Число дѣлителей для какого нибудь числа.—Составленіе общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго числа для двухъ или нѣсколькихъ чиселъ.

Первоначальныя числа.

117. Число называется *первоначальнымъ*, если оно не имѣетъ другаго дѣлителя кромѣ самаго себя и единицы Такъ 1, 2, 3, 5, 7, 11 суть числа первоначальныя.

Очевидно, что первоначальное число есть число первое со всѣми числами, кромѣ чиселъ кратныхъ ему (§ 107).

118. Теорема I.—*Всякое не первоначальное число имѣетъ первоначальнаго дѣлителя.*

Дѣйствительно, пусть N будетъ какое нибудь не первоначальное число. Такъ какъ N число не первоначальное, то оно имѣетъ какого нибудь дѣлителя N′, большаго единицы и меньшаго чѣмъ N. Если N′ число первоначальное, то теорема доказана.

Предположивъ же, что N′ не первоначальное, оно тогда должно имѣть какого нибудь дѣлителя N″ большаго единицы и меньшаго чѣмъ N′, а какъ N есть кратное N′, то очевидно, что N″ будетъ дѣлителемъ для N. Если N″ число первоначальное, то теорема доказана. Но предположимъ, что N″ не первоначальное; тогда N″ должно имѣть дѣлителя N‴, большаго единицы и меньшаго N″, а такъ какъ N есть кратное для N″, то очевидно, что N‴ будетъ дѣлителемъ для N. Если N‴ будетъ число первоначальное, то теорема доказана; если же нѣтъ, то должно продолжить изслѣдова-

ніе тѣмъ же путемъ, не пропуская только первоначальнаго дѣлителя. Дѣйствительно, рядъ чиселъ N′, N″, N‴, ... состоитъ изъ дѣлителей числа N, которые идутъ уменьшаясь, и при томъ всѣ они болѣе 1; поэтому число ихъ должно быть непремѣнно ограничено. А такъ какъ рядъ, удовлетворяющій вопросу, не оканчивается, пока не будетъ найдено число первоначальное, то стало быть число N имѣетъ первоначальнаго дѣлителя.

Слѣдствіе.—*Два или нѣсколько чиселъ, если не будутъ между собою первыми, имѣютъ общаго первоначальнаго дѣлителя.*

Въ самомъ дѣлѣ общій наибольшій дѣлитель данныхъ чиселъ, если онъ не первоначальный, имѣетъ первоначальнаго дѣлителя, а этотъ первоначальный дѣлитель раздѣлитъ данныя числа, какъ числа кратныя общему наибольшему дѣлителю.

119. Теорема II.—*Рядъ первоначальныхъ чиселъ безконеченъ.*

Пусть p будетъ первоначальное число, тогда я говорю, что существуетъ первоначальное число большее чѣмъ p. Дѣйствительно, перемножимъ между собою всѣ первоначальныя числа 1, 2, 3, 5 . . . . до p включительно, и обозначимъ чрезъ P это произведеніе. Прибавя къ нему единицу, получимъ первоначальную или не первоначальную сумму P+1. Если она число первоначальное, то тѣмъ докажется, что существуетъ первоначальное число большее p (*). Если же P+1 будетъ число не первоначальное, то оно имѣетъ первоначальнаго дѣлителя (§ 118); но этотъ дѣлитель необходимо долженъ быть болѣе p, ибо всѣ первоначальныя числа меньшія p входятъ, какъ множители, въ произведеніе P и стало быть дѣлятъ P, но P+1 раздѣлить не могутъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что какое бы ни было данное первоначальное число, всегда существуетъ другое бо́льшее первоначальное; слѣдовательно рядъ первоначальныхъ чиселъ неограниченъ.

(*) Если мы послѣдовательно примемъ 2, 3, 4 . . . . множителями произведенія P, мы найдемъ, что сумма P+1 будетъ выражаться числами 3, 7, 31, 211, 2311, 30031 . . Первые пять членовъ этого ряда суть числа первоначальныя, что даетъ возможность предположить и о послѣдующихъ, но это не оправдывается, ибо шестой членъ 30031 по изслѣдованію оказывается произведеніемъ 59 на 509.

(Прим. авт.).

Составленіе таблицы первоначальныхъ чиселъ

120. Простѣйшій способъ для составленія таблицы первоначальныхъ чиселъ, заключающихся въ предѣлѣ отъ 1 до L извѣстенъ подъ именемъ *рѣшета Эратосѳена*. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Пишутъ рядъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49.....

состоящій изъ всѣхъ чиселъ съ 1 до предѣла L, и зачеркиваютъ въ немъ всѣ не первоначальныя числа.

Первые два члена этого рода 1 и 2, какъ удовлетворяющіе опредѣленію первоначальныхъ чиселъ, должны быть сохранены.

Зачеркиваніе чиселъ ряда начинаютъ отъ 2 и зачеркиваютъ второе изъ двухъ; такимъ образомъ устраняютъ всѣ числа дѣлящіяся на 2 исключая 2; потому что устраненныя числа очевидно суть $2+2$, $2+2+2$, и т. д. Первое сохраняемое число за 2 есть 3, ибо оно число первоначальное.

Потомъ зачеркиваютъ числа ряда, начиная отъ 3, черезъ два третье, сохраняя 3; такимъ образомъ устранятся всѣ числа дѣлящіяся на 3, ибо отброшенныя числа очевидно суть $3+3$, $3+3+3$, и т. д. При этомъ не нужно обращать вниманія на то, что часть чиселъ, подлежащихъ зачеркиванію, какъ кратныхъ для 3, были уже отброшены, какъ кратныя для 2. Первое сохраняемое число за 3 есть 5, ибо оно первоначальное, потому что не дѣлится на меньшія, ни на 2, ни на 3.

Далѣе, отбрасываютъ, числа ряда начиная отъ 5, черезъ четыре пятое; чѣмъ и устраняютъ всѣ кратныя для 6, сохраняя самое 5. Первое сохраняемое число за 5 есть 7, ибо оно число первоначальное, потому что не дѣлится ни на одно изъ первоначальныхъ чиселъ 2, 3, 5, меньшихъ его.

Потомъ зачеркиваютъ числа ряда, начиная отъ 7, черезъ шесть седьмой, и тѣмъ устраняютъ всѣ кратныя 7. Первое сохраняемое число послѣ 7 есть 11, ибо оно число первоначальное.

Посредствомъ указанныхъ нами дѣйствій, въ ряду натуральныхъ чиселъ уничтожатся всѣ кратныя для 2, для 3, для 5, для 7. Предположимъ, что продолжая тѣ же дѣйствія, путемъ правильнымъ и однообразнымъ, устранены члены ряда чиселъ изъ двухъ второй, изъ трехъ третій, .. изъ p послѣдній; тогда рядъ 2, 3.. ..p, будетъ въ себѣ заключать первоначальныя числа до p. Изъ неотброшенныхъ чиселъ, то, которое слѣдуетъ послѣ p, мы обозначимъ чрезъ q; оно есть число первоначальное, непосредственно превышающее p. Положивъ это, я говорю, что всѣ неотброшенныя числа, меньшія квадрата q т. е. q^2 суть числа первоначальныя. Въ самомъ дѣлѣ, пусть N неотброшенное число, меньшее q^2; если это число N не первоначальное, то оно содержитъ дѣлителя N' и называя частное отъ дѣленія N на N' чрезъ N'', имѣемъ $N=N'N''$; а потому $N'N''<q^2$ или $q\times q$. Очевидно, что одно изъ чиселъ N' и N'' должно быть поэтому меньше q; слѣдовательно число N имѣетъ дѣлителя меньшаго чѣмъ q. Если этотъ дѣлитель не первоначальный, то онъ самъ имѣетъ первоначальнаго дѣлителя, изъ чего слѣдуетъ, что число N, во всякомъ случаѣ, имѣетъ первональнаго дѣлителя меньшаго чѣмъ q, и который много если равенъ p. Но это невозможно, ибо тогда N было бы устранено, какъ кратное этому первоначальному числу.

Изъ этого слѣдуетъ, что если q^2 превышаетъ предѣлъ L, то всѣ не первоначальныя числа отъ 1 до L будутъ отброшены; тѣ же, которыя останутся, будутъ числами первоначальными. Если же напротивъ, q^2 менѣе L, то должно продолжать дѣйствіе, зачеркивая кратныя для q, до q^2 включительно.

Или говоря сокращенно:

Чтобы составить таблицу первоначальныхъ чиселъ, отъ 1 *до какого нибудь предѣла* L, *пишутъ натуральный рядъ чиселъ отъ* 1 *до* L; *потомъ послѣдовательно зачеркиваютъ кратныя первоначальнымъ числамъ* 2, 3, 5.....*до наибольшаго первоначальнаго числа* p, *котораго квадратъ не превышаетъ* L. *Числа* 2, 3, 5,....p *получаются при ходѣ дѣйствія послѣдовательно, такъ: когда кончится зачеркиваніе кратныхъ для* 5, *то первоначальное число, непосредственно превышающее* 5, *не отбрасываютъ.*

121. Изложенное въ § 120 показываетъ, что:

Всякое число, которое не дѣлится ни на одно изъ первоначальныхъ чиселъ, которыхъ квадраты менѣе этого числа, есть число первоначальное.

Поэтому, чтобы узнать первоначальное ли, или нѣтъ данное число N, дѣлятъ его послѣдовательно на всѣ первоначальныя числа, которыхъ квадраты не превышаютъ его; если ни одно дѣленіе не оканчивается, то заключаютъ, что N есть число первоначальное.

Должно замѣтить, что квадратъ p^2 какого нибудь первоначальнаго числа p тогда превышаетъ N, когда частное отъ дѣленія N на p будетъ менѣе p. Дѣйствительно предположивъ это, N не будетъ тогда содержать въ себѣ p разъ число p; поэтому N менѣе $p \times p$ или p^2.

Примѣчаніе.—Кстати замѣтить, что всякое первоначальное число кромѣ 2 и 3 есть кратное для 6 увеличенное или уменьшенное единицею. Для 5 это очевидно, ибо оно равно 6 — 1. Теперь пусть N будетъ число большее чѣмъ 6, раздѣляя его на 6, остатки могутъ быть 0, 1, 2, 3, 4, или 5. Если остатокъ будетъ 0, то N, какъ дѣлящееся на 6, не будетъ числомъ первоначальнымъ. Если остатокъ будетъ одно изъ чиселъ 2 или 4, то какъ тотъ такъ и другой остатокъ и дѣлитель 6 будутъ дѣлиться на 2, почему и дѣлимое N раздѣлится на 2, слѣдовательно оно первоначальнымъ не будетъ. Точно также, если остатокъ будетъ 3, N будетъ дѣлиться на 3, и первоначальнымъ не будетъ. Изъ этого слѣдуетъ, что если число N будетъ первоначальнымъ, то остатокъ отъ дѣленія его на 6 долженъ быть или 1 или 5. Если случится первое, то N будетъ кратнымъ для 6 увеличеннымъ на 1. Если же второе, то N будетъ кратное для 6 увеличенное на 5, или иначе, кратное для 6 уменьшенное на 1.

122. Таблица первоначальныхъ чиселъ составлены давно, изъ нихъ болѣе извѣстны таблицы *Шернака* и *Буркхардта*. Таблицы Шернака содержатъ въ себѣ первоначальныя числа и дѣлители прочихъ чиселъ до 1000000. Таблицы Буркхардта даютъ первоначальныя числа отъ 1 до 3036000 и наименьшихъ дѣлителей прочихъ чиселъ. Изъ разсмотрѣнія этихъ таблицъ видно, что отъ 1 до 100 имѣется 26 первоначальныхъ чиселъ, отъ 1 до 1000 ихъ 169, отъ 1 до 10000 ихъ 1230, отъ 1 до 100000 ихъ 9592, и отъ 1 до 1000000 ихъ 78493.

Мы помѣщаемъ здѣсь таблицу первоначальныхъ чиселъ отъ 3 до 1229, для полноты слѣдуетъ къ нимъ прибавить числа 1 и 2.

Таблица первоначальныхъ чиселъ до 1229.

3	79	181	293	421	557	673	821	953	1091
5	83	191	307	431	563	677	823	967	1093
7	89	193	311	433	569	683	827	971	1097
11	97	197	313	439	571	691	829	977	1103
13	101	199	317	443	577	701	839	983	1109
17	103	211	331	449	587	709	853	991	1117
19	107	223	337	457	593	719	857	997	1123
23	109	227	347	461	599	727	859	1009	1129
29	113	229	349	463	601	733	863	1013	1151
31	127	233	353	467	607	739	877	1019	1153
37	131	239	359	479	613	743	881	1021	1163
41	137	241	367	487	617	751	883	1031	1171
43	139	251	373	491	619	757	887	1033	1181
47	149	257	379	499	631	761	907	1039	1187
53	151	263	383	503	641	769	911	1049	1193
59	157	269	389	509	643	773	919	1051	1201
61	163	271	397	521	647	787	929	1061	1213
67	167	277	401	523	653	797	937	1063	1217
71	173	281	409	541	659	809	941	1069	1223
73	179	283	419	547	661	811	947	1087	1229

Свойства относящіяся къ теоріи первоначальныхъ чиселъ.

Теорема I.—*Всякое первоначальное число, дѣлящее произведеніе нѣсколькихъ множителей, дѣлитъ по крайней мѣрѣ одного изъ этихъ множителей.*

1°. Разсмотримъ сначала произведеніе двухъ множителей A и B и положимъ, что ихъ произведеніе AB дѣлится на первоначальное число p, тогда я говорю: p будетъ дѣлить или A или B. Въ самомъ дѣлѣ, если p не дѣлитъ A, то оно число первое съ нимъ (§ 117), и слѣдовательно, если оно дѣлитъ произведеніе AB, оно должно раздѣлить производителя B (§ 112).

2°. Во вторыхъ, разсмотримъ произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей A, B, C, D, и положимъ, что ихъ произведеніе ABCD, дѣлится на первоначальное число p; тогда я говорю, что если p не дѣлитъ ни A, ни B, ни C, то оно раздѣлитъ D. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе ABCD можетъ быть разсматриваемо, какъ состоящее изъ множителей A и BCD; и пусть оно по предположенію не дѣлитъ A, тогда

оно раздѣлитъ другаго множителя BCD. Но BCD есть произведеніе двухъ множителей B и CD, и какъ p не дѣлитъ B, то оно должно дѣлить CD. Наконецъ p, дѣлящее CD, но не дѣлящее C, должно раздѣлить D, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе I.—*Всякое первоначальное число, дѣлящее степень какого нибудь числа, дѣлитъ и самое число.*

Положимъ, напримѣръ, что первоначальное число p дѣлитъ A^3; я говорю, что p должно дѣлить и A. Въ самомъ дѣлѣ, A^3 равно произведенію $A \times A \times A$ дѣлящемуся на p, значитъ какой нибудь изъ его множителей тоже дѣлится на p; слѣдовательно A дѣлится на p.

Слѣдствіе II.—*Если два числа будутъ первыми между собою, то и степени ихъ будутъ также первыми между собою.*

Напримѣръ, если числа 8 и 15 первыя между собою, то, я говорю, что 8^4 и 15^3 будутъ также первыми между собою. Дѣйствительно, если 8^4 и 15^3 не будутъ первыми между собою, то они должны имѣть какого нибудь общаго дѣлителя p (§ 118, слѣдствіе). Но тогда p, дѣлящее 8^4 раздѣлитъ и 8 (слѣдствіе I.) и если оно дѣлитъ 15^3, то раздѣлитъ и 15, слѣдственно выдетъ противное предположенію, что числа 8 и 15 не будутъ первыми между собою.

124. Теорема. II.—*Всякое число первое между множителями какого нибудь произведенія будетъ первымъ и съ произведеніемъ; и обратно, всякое число первое съ произведеніемъ будетъ первымъ и съ множителями этого произведенія.*

1°. Пусть какое нибудь число N и множители произведенія ABCD будутъ числа первыя между собою, то, я говорю, что N съ этимъ произведеніемъ будутъ числами первыми между собою. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что справедливо противуположное, что N и ABCD имѣютъ общаго первоначальнаго дѣлителя p; тогда p, дѣлящій произведеніе ABCD, будетъ по меньшей мѣрѣ дѣлить хотя одного множителя, напримѣръ A. Отсюда выходитъ, что A и N имѣютъ общаго дѣлителя P, что противно предположенію.

2°. Пусть число N и произведеніе ABCD будутъ числа первыя между собою, тогда, я говорю, что N и каждый изъ множителей произведенія будутъ числами первыми между собою. Дѣйствительно, предположимъ, что N и множитель A не будутъ числами первыми между собою, но имѣютъ общаго дѣлителя p; тогда p, дѣлящій A, будетъ дѣлить и

произведеніе ABCD; стало быть N и ABCD имѣютъ общаго множителя, что противно предположенію.

125. Теорема III.—*Всякое число, дѣлящееся на нѣсколько чиселъ первыхъ между собою, одно за другимъ, дѣлится и на ихъ произведеніе.*

Положимъ, напримѣръ, что число N дѣлится порознь, одно за другимъ, на каждое изъ чиселъ A, B, C, первыхъ между собою; тогда, я говорю, что N будетъ дѣлиться на ихъ произведеніе ABC. Дѣйствительно, пусть Q есть частное отъ дѣленія N на A, тогда

$$N=AQ.$$

Это произведеніе AQ, по предположенію, дѣлимо на B, но B первое съ A, стало быть оно дѣлитъ Q. Пусть тогда Q' будетъ частное отъ дѣленія Q на B, тогда $Q=BQ'$, а слѣдовательно

$$N=ABQ'.$$

Это произведеніе ABQ', имѣющее двухъ множителей AB и Q' по предположенію дѣлимо на C, но C, будучи первымъ съ A и съ B, будетъ первымъ и съ ихъ произведеніемъ AB (§ 124); поэтому оно раздѣлитъ Q'. Пусть теперь Q'' будетъ частное отъ дѣленія Q' на C', тогда $Q'=CQ''$, а слѣдовательно

$$N=ABCQ'';$$

отсюда видно, что N раздѣлится на произведеніе ABC.

Примѣчаніе.—Изъ этой теоремы и изъ результатовъ, полученныхъ въ § 91 и слѣдующихъ, можно вывести условія дѣлимости чиселъ на 2×3, 5×3, 2×9, 5×9, 2×11, 5×11, 9×11, $2\times3\times11$, и т. п. Напримѣръ, 45 есть произведеніе чиселъ 5 и 9, первыхъ между собою, и для того, чтобы число дѣлилось на 45 должно, чтобы оно дѣлилось на 9 и на 5. Такимъ образомъ условіе дѣлимости числа на 45 слѣдующее: чтобы число дѣлилось на 45 нужно чтобы, сумма его цифръ дѣлилась на 9 и чтобы послѣдняя въ немъ цифра была 0 или 5.

Разложеніе чиселъ на первоначальныхъ множителей.

126. Теорема I.—*Всякое не первоначальное число есть произведеніе первоначальныхъ чиселъ.*

Дѣйствительно, пусть N будетъ число не первоначальное. Мы видѣли, что оно должно имѣть (§ 118) первоначальнаго дѣлителя a. Пусть N' есть частное отъ дѣленія N на a, тогда

$$N=aN'.$$

Если N' число первоначальное, теорема доказана. Въ противномъ случаѣ, N' должно имѣть первоначальнаго дѣлителя b, и, назвавъ N'' частное отъ дѣленія N' на b, имѣемъ $N'=bN''$, слѣдовательно,

$$N=ab\ N''.$$

Если N'' число первоначальное, теорема доказана. Въ противномъ случаѣ, N'' имѣетъ первоначальнаго дѣлителя c, и, назвавъ N''' частное отъ дѣленія N'' на c, имѣемъ $N''=cN'''$, слѣдовательно

$$N=abc\ N'''.$$

Если N''' число первоначальное, теорема доказана. Если же N''' не первоначальное, то изслѣдованіе ведутъ тѣмъ же путемъ до тѣхъ поръ, пока въ ряду частныхъ N', N'', N''' и т. д., получится первоначальное число; и въ то время теорема будетъ доказана. Въ ряду N' N'' N''' и т. д., не достигнуть до первоначальнаго числа нельзя, ибо частныя, его составляющія, уменьшаются и число ихъ необходимо должно имѣть предѣлъ.

127. По предъидущей теоремѣ, всякое не первоначальное число N можетъ быть выражено слѣдующею формулою.

$$N=abc.....k\ l,$$

Гдѣ a, b, c, .. k, l суть числа первоначальныя, равныя или неравныя. Поэтому говорятъ, что число N *разложено на первоначальныхъ множителей*. Стало быть, разложеніе числа на первоначальныхъ множителей состоитъ въ отысканіи первоначальныхъ чиселъ, для которыхъ данное число будетъ произведеніемъ.

Когда число разложено на первоначальныхъ множителей, то каждаго изъ равныхъ множителей пишутъ одинъ разъ, приписывая надъ нимъ показатель равный числу повтореній (§ 79). Напримѣръ, если число N есть произведеніе трехъ множителей равныхъ 7, двухъ множителей равныхъ 11 и множителя 13, то пишутъ

$$N=7^3\times 11^2\times 13.$$

И говорятъ тогда, что число N *состоитъ изъ первоначальныхъ множителей* 7, 11, 13 *съ показателями послѣдовательно равными* 3, 2, 1.

128. Теорема II.—*Одно число разлагается на одинъ и тотъ же рядъ первоначальныхъ множителей.*

Для доказательства этой теоремы, нужно доказать, что если два произведенія первоначальныхъ множителей представляютъ величину одного и того же числа, то эти произведенія состоятъ изъ одинаковыхъ множителей.

1°. *Если два произведенія первоначальныхъ множителей равны, то всѣ первоначальные множители, находящіеся въ одномъ, будутъ находиться и въ другомъ произведеніи.*

Положимъ, что 3 будетъ однимъ изъ множителей перваго произведенія. 3, дѣлящее первое произведеніе, раздѣлитъ и второе, ибо по предложенію они равны; поэтому оно раздѣлитъ по крайней мѣрѣ одного изъ множителей втораго произведенія (§ 123), а какъ эти множители суть числа первоначальныя, то ни одинъ изъ нихъ не раздѣлится на 3, если не будетъ равенъ 3.

2°. *Если два произведенія первоначальныхъ множителей равны, то всѣ множители перваго, повторяющіеся въ немъ нѣсколько разъ, будутъ столько же разъ повторяться и во второмъ.*

Положимъ, напримѣръ, что второе произведеніе имѣетъ четыре множителя равныхъ 3, а первое имѣетъ ихъ болѣе. Уничтожая четыре раза множителя 3 въ нашихъ двухъ равныхъ произведеніяхъ, новыя произведенія, которыя мы получимъ, должны быть равны. Но это невозможно, потому что первое произведеніе имѣетъ еще множителя 3, котораго уже не встрѣчается во второмъ. Стало быть, невозможно положить, чтобы множитель 3 находился въ одномъ произведеніи большее число разъ чѣмъ въ другомъ.

Изъ предъидущаго заключаемъ, что если два произведенія первоначальныхъ множителей равны, то каждый множитель, потворяющійся въ одномъ изъ произведеній одинъ, два, три, и т. д раза, будетъ повторяться одинъ, два, три, и т. д. раза и въ другомъ. Слѣдовательно, эти два произведенія тождественны; другими словами, одно число разлагается только на одинъ и тотъ же рядъ первоначальныхъ множителей.

129. Доказавъ, что число разлагается на первоначальныхъ множителей и при томъ на одинъ и тотъ же рядъ этихъ множителей, мы теперь укажемъ пріемъ по которому производится это разложеніе.

Возьмемъ, напримѣръ, 16776. Это число дѣлимо на 2 (§ 91); производя дѣленіе находимъ для частнаго 8388, поэтому

$$16776=2\times 8388,$$

и останется разлагать на первоначальныхъ множителей число 8388. Это число также дѣлится на 2, производя дѣленіе находимъ частное 4194, поэтому

$$8388=2\times 4194.$$

Слѣдовательно:

$$16776=2\times 2\times 4194=2^2\times 4194.$$

Теперь приходится разлагать 4194 на первоначальныхъ множителей. Это число опять дѣлится на 2; производя дѣленіе найдемъ въ частномъ 2097, значитъ

$$4194=2\times 2097;$$

данное же число

$$16776=2^2\times 2\times 2097=2^3\times 2097.$$

За тѣмъ приступаемъ къ разложенію на первоначальныхъ множителей 2097. Это число не дѣлится на 2, но оно дѣлится на 3 (§ 95). Производя дѣленіе, получимъ въ частномъ 699, а потому

$$2097=3\times 699;$$

слѣдовательно

$$16776=2^3\times 3\times 699.$$

Число 699 тоже дѣлится на 3, раздѣливъ, получимъ въ частномъ 233, тогда

$$699=3\times 233;$$

а

$$16776=2^3\times 3\times 3\times 233=2^3\times 3^2\times 233.$$

Такимъ образомъ останется разложить на первоначальныхъ множителей 233, но справляясь съ таблицею первоначальнымъ чиселъ (§ 122) видимъ, что это, число первоначальное, а потому дѣйствіе оканчиваемъ.

Примѣчаніе.—Для опредѣленія первоначальное ли число 233 достаточно имѣть таблицу первоначальныхъ чиселъ только до наименьшаго изъ тѣхъ, которыхъ квадраты превышаютъ 233. Тогда, какъ мы видѣли (§ 121), достаточно произвести дѣленіе 233 на каждаго изъ этихъ первоначальныхъ чиселъ. Если ни одно изъ этихъ дѣленій не будетъ кончено, то это будетъ доказывать, что 233 число первоначальное.

Полезно располагать дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

16776	2
8388	2
4194	2
2097	3
699	3
233	233
1	

130. Изъ предъидущаго можно вывести слѣдующее правило: *Для разложенія какого нибудь числа N на первоначальныхъ множителей, производятъ послѣдовательныя дѣленія того числа на каждое изъ первоначальныхъ чиселъ 2, 3, 5. . . ., которыхъ квадраты не превышаютъ даннаго числа и при дѣленіи на которыхъ получается въ остаткѣ нуль. Въ случаѣ, если таковаго не найдется, заключаютъ, что число N первоначальное. Въ противномъ случаѣ, на какой нибудь дѣлитель напримѣръ* p, *дающій въ остаткѣ нуль, дѣлятъ полученное частное и такъ до тѣхъ поръ, пока получится частное не дѣлящееся на* p. *N тогда равно какой нибудь степени* p, *показатель которой есть число, показывающее сколько* p *было взято дѣлителемъ, умноженной на послѣднее полученное частное. Вопросъ послѣ того сводится на разложеніе на первоначальныхъ множителей этого послѣдняго частнаго. Далѣе продолжается тотъ же пріемъ, выбирая каждый разъ первоначальныхъ дѣлителей превышающихъ* p.

Примѣчаніе.—Если число, подлежащее разложенію на первоначальныхъ множителей, есть произведеніе двухъ или нѣсколькихъ извѣстныхъ чиселъ, то дѣйствіе облегчаютъ тѣмъ, что разлагаютъ эти числа порознь и потомъ изъ всѣхъ множителей составляютъ одно произведеніе.

Положимъ, напримѣръ, что требуется 25200 разложить на первоначальныхъ множителей. 25200 есть произведеніе двухъ чиселъ 252 и 100. Разлагая эти числа на первоначальные множители, получимъ:

$$252=2^2\times3^2\times7,$$
$$100=2^2\times5^2;$$

слѣдовательно имѣемъ

$$25200=2^2\times3^2\times7\times2^2\times5^2;$$

или

$$25200=2^4\times3^2\times5^2\times7.$$

131. Теорема III.—*Если одно число есть степень другаго числа, то показатели его первоначальныхъ множителей будутъ дѣлиться на показателя степени.*

Дѣйствительно, положимъ, что какое нибудь число N будетъ четвертая степень какого нибудь другаго числа, напримѣръ $2^3\times2^2\times233$; т. е.

$$N=(2^3\times2^2\times233)^4,$$

или (§ 82)

$$N=2^{3\times4}\times3^{2\times4}\times233^4;$$

что и требовалось доказать.

Обратно, если показатели первоначальныхъ множителей какого нибудь числа имѣютъ общаго дѣлителя, то это число есть степень, показатель которой равенъ этому дѣлителю.

Возьмемъ число

$$N=2^{3\times4}\times3^{2\ 4}\times233^4.$$

котораго первоначальные множители имѣютъ показателей дѣлящихся на 4.

Мы можемъ написать

$$N=(2^3\times3^2\times233)^4,$$

и слѣдовательно N есть четвертая степень $2^3\times2^2\times233$.

Слѣдствіе.—*Если число N дѣлится на какое нибудь первоначальное число, но не дѣлится на квадратъ этого первоначальнаго числа, то число N не можетъ быть ни квадратомъ, ни кубомъ, ни какою либо степенью этого числа.*

Точно также, если какое нибудь число N дѣлится на квадратъ какого нибудь первоначальнаго числа, но не дѣлится на кубъ этого числа, то N не можетъ быть ни кубомъ ни степенью съ показателемъ превышающимъ три.

Нахожденіе дѣлителей числа.

132. Теорема.—*Для того, чтобы два числа дѣлились одно на другое, необходимо и достаточно, чтобы каждый изъ первоначальныхъ множителей дѣлителя находился въ дѣлимомъ съ показателемъ, по крайней мѣрѣ, равняющимся тому, который былъ въ дѣлитель.*

Я говорю, во первыхъ, что это условіе необходимо. Дѣйствительно, если дѣлимое дѣлится на дѣлителя, то оно рав-

но произведенію дѣлителя на частное, слѣдовательно оно состоитъ изъ всѣхъ первоначальныхъ множителей дѣлителя, а между прочимъ и частнаго.

Во вторыхъ, что это условіе достаточно, то это потому, что если оно существуетъ, то дѣлимое можно разложить на два множителя, изъ которыхъ первый будетъ произведеніе первоначальныхъ множителей дѣлителя, а второй произведеніе остальныхъ первоначальныхъ множителей.

133. Теперь предложимъ себѣ составить всѣхъ дѣлителей, напримѣръ, числа 16776.

Каждый изъ дѣлителей 16776 есть произведеніе сколькихъ нибудь первоначальныхъ множителей этого числа, то начнемъ съ разложенія этаго числа. Мы нашли (§ 129) что

$$16776 = 2^3 \times 3^2 \times 233.$$

Послѣ того очевидно, что всякій дѣлитель для 16776, въ томъ числѣ единица и самое число 1676, можетъ быть разсматриваемо, какъ произведеніе трехъ множителей: первый изъ нихъ одно изъ чиселъ $1, 2, 2^2, 2^3$; второй — одно изъ чиселъ $1, 3, 3^2$; наконецъ третій—одно изъ чиселъ $1, 233$. Слѣдовательно всѣ дѣлители числа 16776 получатся изъ слѣдующей таблицы:

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3 \\ 1,\ 3,\ 3^2 \\ 1,\ 233, \end{array}$$

взявъ всѣ произведенія получающіяся отъ перемноженія каждаго числа первой линіи на каждое число второй, потомъ каждаго изъ найденныхъ результатовъ на каждое изъ чиселъ третьей строки.

Перемножая прежде число первой строки на числа второй, получится слѣдующая таблица:

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3, \\ 3^2, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^3\times 3^2. \end{array}$$

Перемножая числа, составляющія эту таблицу на числа третьей строки первой таблицы, получимъ новую таблицу:

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3, \\ 3^2, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^3\times 3^2, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 233, & 2\times233, & 2^2\times233, & 2^3\times233, \\ 3\times233, & 2\times3\times233, & 2^2\times3\times233, & 2^3\times3\times233, \\ 3^2\times233, & 2\times3^2\times233, & 2^2\times3^2\times233, & 2^3\times3^2\times233, \end{array}$$

которая и даетъ всѣхъ дѣлителей числа 16776. Совершая указанныя умноженія, находимъ

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 4, & 8, \\ 3, & 6, & 12, & 24, \\ 9, & 18, & 36, & 72, \\ 233, & 466, & 932, & 1864, \\ 699, & 1398, & 2796, & 5592, \\ 2097, & 4194, & 8388, & 16776 \end{array}$$

134. Изъ предъидущаго можно вывести слѣдующее правило:

Чтобы найти всѣхъ дѣлителей какого нибудь числа, его разлагаютъ на первоначальныхъ множителей, потомъ пишутъ таблицу изъ столькихъ горизонтальныхъ строкъ, сколько предложенное число будетъ имѣть различныхъ множителей. Каждая изъ этихъ строкъ должна быть составлена изъ единицы сопровождаемой всѣми степенями каждаго изъ первоначальныхъ множителей даннаго числа.

Потомъ перемножаютъ числа первой строки на числа второй, полученные результаты на числа третьей строки и такъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ перемножены всѣ числа горизонтальныхъ строкъ таблицы. Послѣднія полученныя произведенія будутъ дѣлителями даннаго числа.

Число дѣлителей какого нибудь числа.

135. Теорема.—*Число дѣлителей какого нибудь числа N равно произведенію, полученному отъ перемноженія показателей первоначальныхъ множителей числа N, увеличенныхъ каждый единицею.*

Дѣйствительно, разсмотримъ напримѣръ число

$$16776=2^3\times3^2\times233.$$

Чтобы имѣть всѣхъ дѣлителей этаго числа, составляютъ какъ было слѣдующую таблицу:

$$\begin{array}{c} 1, 2, 2^2, 2^3, \\ 1, 3, 3^2, \\ 1, 233, \end{array}$$

и перемножаютъ каждое число первой строки на каждое число второй, потомъ полученныя результаты на каждое число третьей строки. Полученныя такимъ образомъ произведенія будутъ дѣлителями даннаго числа.

Показатели первоначальныхъ множителей въ 16776 суть 3, 2, 1; первая строка содержитъ 3+1 число, вторая 2+1, третья 1+1. По этому когда умножатъ числа первой строки на числа второй, то каждое изъ послѣднихъ дастъ 3+1 произведеніе, т. е. $(3+1)\times(2+1)$ будетъ число всѣхъ произведеній. Перемножая эти произведенія на каждое изъ чиселъ третьей строки, новыхъ произведеній очевидно получится $(3+1\times(2+1)\times(1+1)$.

Слѣдовательно число дѣлителей для 16776 будетъ

$$(3+1)\times(2+1)\times(1+1),$$

что и требовалось доказать.

Примѣчаніе I.—Къ дѣлителямъ числа, какъ мы уже замѣтили, должно причислять единицу и самое число.

Примѣчаніе II.—Если показатели первоначальныхъ множителей какого нибудь числа будутъ четные, то очевидно, что это число будетъ имѣть нечетное число дѣлителей. Но если между первоначальными множителями числа будетъ одинъ съ показателемъ не четнымъ, то это число будетъ имѣть четное число дѣлителей. Изъ этого и по теоремѣ § 131 выходитъ, что *число будетъ или не будетъ квадратомъ смотря потому, будетъ ли четнымъ или нечетнымъ число его дѣлителей.*

Составленіе общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго числа для двухъ или нѣсколькихъ чиселъ.

136. Теорема I.—*Если два или нѣсколько чиселъ разложены на первоначальныхъ множителей, то общій наибольшій дѣлитель получится непосредственно, составивъ произведеніе изъ первоначальныхъ множителей общихъ въ этихъ числахъ, принимая каждый съ наименьшимъ показателемъ.*

Дѣйствительно, разсмотримъ два или нѣсколько чиселъ и положимъ для ясности, что эти числа имѣютъ только слѣдующихъ общихъ множителей 3, 5, 7. Между прочимъ положимъ, что множитель 3 въ одномъ изъ чиселъ имѣетъ по-

казателемъ 2, а въ другихъ показатели его равны или болѣе 2; что множитель 5 въ одномъ изъ чиселъ имѣетъ показателемъ 4, а въ другихъ показатели его равны или болѣе 4; и наконецъ, что множитель 7 въ одномъ числѣ имѣетъ показателя 1, а въ другихъ числахъ показатели его равны или болѣе 1.

Положивъ это, общій дѣлитель данныхъ чиселъ не можетъ содержать въ себѣ другихъ дѣлителей кромѣ 3, 5, 7, и не можетъ содержать ихъ въ себѣ иначе, какъ съ показателями много если равными послѣдовательно 2, 4, 1; поэтому онъ долженъ быть не болѣе произведенія $3^2 \times 5^4 \times 7$. Тогда $3^2 \times 5^4 \times 7$ непремѣнно раздѣлитъ каждое изъ данныхъ чиселъ (§ 132), и стало быть произведеніе это будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ.

137. Теорема II.—*Если два или нѣсколько чиселъ разложены на первоначальныхъ множителей, то наименьшее общее кратное число получится непосредственно, составивъ произведеніе изъ всѣхъ первоначальныхъ множителей, находящихся въ одномъ изъ этихъ чиселъ или въ нѣсколькихъ изъ нихъ, принимая каждый множитель съ наибольшимъ показателемъ.*

Дѣйствительно, разсмотримъ два или нѣсколько чиселъ и положимъ для ясности, что всѣ первоначальные множители, входящіе въ одно изъ данныхъ чиселъ или въ нѣсколькихъ изъ нихъ, будутъ 3, 5, 7. Также положимъ: что множитель 3 въ одномъ изъ данныхъ чиселъ находится съ показателемъ 2, а въ другихъ, содержащихъ его числахъ, заключается съ показателями равными или меньшими 2; далѣе, что множитель 5 находится въ одномъ изъ чиселъ съ показателемъ 4, а въ прочихъ, содержащихъ его числахъ, съ показателями равными или меньшими 4; наконецъ, что множитель 7 находится только съ показателемъ 1 во всѣхъ содержащихъ его числахъ.

Положивъ это, общее кратное даннымъ числамъ необходимо должно содержать въ себѣ первоначальныхъ множителей 3, 5, 7 съ показателями по меньшей мѣрѣ равными соотвѣтственно 2, 4, 1; стало быть оно по меньшей мѣрѣ должно быть равно $3^2 \times 5^4 \times 7$. Но $3^2 \times 5^4 \times 7$ дѣлится безъ остатка на каждое изъ предложенныхъ чиселъ (§ 132), поэтому оно для нихъ будетъ наименьшимъ кратнымъ.

Примѣчаніе. —Изъ двухъ предшествующихъ теоремъ легко вывести, что *наименьшее кратное двухъ чиселъ равно произведенію этихъ чиселъ раздѣленному на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя*; это впрочемъ было уже доказано въ § 114, только другими соображеніями.

Упражненія.

1) Доказать, что квадратъ какого нибудь первоначальнаго числа кромѣ 2 и 3 равенъ кратному 24-хъ увеличенному единицею.

2) Такъ какъ всѣ первоначальныя числа, кромѣ 2 и 3, суть кратныя для 6, если ихъ увеличить на 1, или уменьшить на 1; то доказать, что чиселъ послѣдняго рода имѣется безконечное число.

Т. е. должно указать, что если будетъ дано первоначальное число p, равняющееся, когда будетъ уменьшено на 1, кратному 6, и если чрезъ P обозначимъ произведеніе всѣхъ первоначальныхъ множителей 1, 2, 3... до p, то разность P—1 всегда будетъ имѣть первоначальнаго дѣлителя превышающаго p и который будетъ кратнымъ отъ 6, если уменьшить его на 1.

3) Такъ какъ всѣ первоначальныя числа кромѣ 2 суть кратныя для 4, если ихъ увеличить на 1, или уменьшить на 1; то доказать, что послѣдняго рода чиселъ имѣется безконечное число.

4) Доказать, что произведеніе трехъ послѣдовательныхъ чиселъ всегда дѣлимо на 6.

5) Доказатель, что если n выражаетъ какое нибудь число, то произведеніе $n(n+1)(2n-1)$ дѣлимо на 6.

6) Доказать, что если a и b представляютъ два первыхъ между собою числа, то $a+b$ и a^2+b^2-ab не можетъ имѣть другаго общаго дѣлителя кромѣ 3.

7) Доказать, что если дѣлители какого нибудь числа N будутъ написаны одинъ за другимъ, по порядку ихъ величинъ, то произведеніе двухъ дѣлителей, имѣющихъ равныя разстоянія отъ крайнихъ, равно N.

8) Найти наименьшее число, имѣющее 180 дѣлителей.

9) Сколькими способами можно разложить число N на два первыхъ между собою множителя? Доказать, что число

способовъ равно 2^n-1, гдѣ n есть число различныхъ первоначальныхъ множителей числа N.

10) Пусть a, b, a', b' будутъ какія нибудь четыре числа, а пятое число p будетъ первымъ съ каждымъ изъ четырехъ предъидущихъ. Требуется доказать, что если разности $ab-a'b'$ и $a-a'$ дѣлимы на p, то и разность $b-b'$ также раздѣлится на p.

11) Возьмемъ три числа A, B, C; D общій наибольшій дѣлитель для A и B; D′ таковой же для A и C; D″ — для B и C, и наконецъ D‴ общій наибольшій дѣлитель чиселъ A, B, C. Доказать, что наименьшее кратное чиселъ A, B, C равно частному ABCD‴: DD′D″.

12) Возьмемъ четыре числа A, B, C, D; P ихъ произведеніе; P′ произведеніе шести общихъ наибольшихъ дѣлителей этихъ чиселъ взятыхъ по два; P″ произведеніе четырехъ общихъ наибольшихъ дѣлителей этихъ чиселъ взятыхъ по три; наконецъ P‴ общій наибольшій дѣлитель чиселъ A, B, C, D. Доказать, что наименьшее кратное четырехъ чиселъ A, B, C, D равно частному PP″: P′P‴.

КНИГА ТРЕТЬЯ.

ДРОБИ И ЧИСЛА ДЕСЯТИЧНЫЯ.

ГЛАВА I.

СВОЙСТВА ДРОБЕЙ.

Предварительныя понятія.—О дробяхъ.—Основныя свойства дробей.—Дроби несократимыя.—Приведеніе дробей къ простѣйшему виду. — Приведеніе дробей къ общему знаменателю.—Приведеніе дробей къ наименьшему общему знаменателю.—Измѣненіе происходящее съ дробью отъ прибавленія къ обоимъ ея членамъ одного и того же числа.

Предварительныя понятія.

138. *Величиною* называютъ все то, что способно увеличиваться или уменьшаться. Напримѣръ: *протяженія*, *поверхности*, *объемы*, *массы* тѣлъ, *скорости* двигающихся тѣлъ, *равномѣрность* самаго движенія, *сила* при этомъ проявляющаяся —суть величины.

Если какая нибудь величина составлена изъ другой однородной съ нею величины, взятой ровно 1, 2, 3,... и т. д. разъ, то первая величина называется *кратною* второй. Въ то же время, вторая величина называется *множителемъ* или какою нибудь *частью* первой.

Единицею называютъ произвольно взятую, но хорошо извѣстную, величину, служащую для *измѣренія* однородныхъ съ нею величинъ.

Измѣрять какую нибудь величину значитъ искать сколько эта величина заключаетъ въ себѣ единицъ или частей единицы.

Мы пока будемъ разсматривать только два простѣйшихъ случая при измѣреніи величинъ, а именно: случай, когда

величина, которую желаютъ измѣрить, будетъ кратная единицы и случай, когда она будетъ кратная извѣстной части единицы.

1°. *Величина, которую желаютъ измѣрить, есть кратная единицы.* Предположимъ напримѣръ, что желаютъ измѣрить длину, состоящую ровно изъ четырехъ разъ взятой единицы. Тогда число четыре выразитъ мѣру длину; другими словами, длина будетъ выражаться числомъ 4.

2°. *Величина, которую желаютъ измѣрить, есть кратная какой нибудь извѣстной части единицы.* Возьмемъ, какъ прежде, какую нибудь длину и предположимъ для примѣра, что единица была раздѣлена на 7 равныхъ частей, длина же состоитъ равно изъ 5 такихъ частей. Тогда говорятъ, что длина содержитъ *дробь* единицы, равную 5 *седьмымъ*; или что длина измѣряется *дробью 5 седьмыхъ*. Еще, возьмемъ какой нибудь промежутокъ времени и предположимъ, что единица времени раздѣлена на 12 равныхъ частей, разсматриваемый же промежутокъ состоитъ изъ 35 такихъ частей. Тогда этотъ промежутокъ времени будетъ измѣряться *дробью 35 двѣнадцатыхъ*.

139. Во всѣхъ случаяхъ, результатъ измѣренія всякой величины называется *числомъ*.

Когда какая нибудь величина будетъ кратная единицы, тогда число опредѣляющее величину называется *числомъ цѣлымъ*, или просто *цѣлымъ*. Тѣ числа, которыя мы исключительно до сихъ поръ разсматривали, суть числа цѣлыя, и разсматривались они, какъ выражающія совокупности предметовъ сходныхъ, но отдѣльныхъ.

Когда какая нибудь величина будетъ кратная какой нибудь извѣстной части единицы, тогда число, опредѣляющее ее называется *числомъ дробнымъ* или *дробью*.

Когда величины будутъ такимъ образомъ выражены числами, то они принимаютъ названіе *количествъ*.

Какъ вообще *Математика*, такъ и Ариѳметика, составляющая только первую часть оной, есть наука о величинахъ.

О дробяхъ.

140. На основаніи предъидущаго, *дробь* образуется тогда, когда мы раздѣлимъ единицу на какое нибудь число частей

и возьмемъ одну или нѣсколькихъ такихъ частей. Число равныхъ частей на которое раздѣлена единица есть *знаменатель* дроби, а число выражающее сколько взято такихъ частей есть *числитель* дроби. Числитель и знаменатель вмѣстѣ называются *членами* дроби.

Очевидно, что дробь будетъ менѣе или болѣе единицы тогда, когда ея числитель будетъ менѣе или болѣе знаменателя.

Чтобы изобразить дробь должно ея знаменателя написать подъ числителемъ, раздѣляя ихъ горизонтальною чертою. Такимъ образомъ, $\frac{5}{7}$ представляетъ дробь, имѣющую числителемъ 5, а знаменателемъ 7.

Чтобы произнести дробь, должно произнести прежде числителя, а потомъ знаменателя, измѣняя приличнымъ образомъ окончаніе послѣдняго слова сообразно смыслу. Такъ $\frac{5}{7}$ произносится *пять седьмыхъ*, $\frac{1}{7}$—*одна седьмая*. Часто встрѣчаются дроби имѣющія знаменателемъ 2, 3, 4, а такъ какъ единица тогда дѣлилась на 2, 3, 4 равныя части, то эти части принято называть: *половина*, *треть*, *четверть*; а потому дроби $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}$ произносятся: *половина*, *двѣ трети*, *пять четвертей*.

141. Всякое цѣлое число можетъ быть представлено числомъ дробнымъ, имѣющимъ знаменателемъ произвольно взятое число. Возьмемъ для примѣра число 4, каждая единица этого числа въ седьмыхъ доляхъ будетъ равна 7 седьмымъ; 4×7 будетъ число всѣхъ седьмыхъ частей; стало быть $\frac{4 \times 7}{7}$ или $\frac{28}{7}$ будетъ равно 4. Слѣдовательно:

Чтобы обратить цѣлое число въ дробь, знаменатель которой будетъ данъ, должно цѣлое число умножить на данный знаменатель и подписать его подъ полученнымъ результатомъ.

142. *Всякая дробь большая единицы равна частному отъ дѣленія числителя на знаменателя, сложенному съ дробью меньшею единицы и имѣющею числителемъ остатокъ дѣленія, а знаменателемъ—знаменателя данной дроби.*

Возьмемъ, напримѣръ, дробь $\frac{33}{7}$. Раздѣляя числителя на знаменателя получимъ частное 4 и остатокъ 5; такимъ об-

разомъ имѣемъ $33=4\times7+5$. Слѣдовательно $\frac{33}{7}$ составляютъ 4×7 седьмыхъ и еще 5 седьмыхъ, или иначе,

$$\frac{33}{7}=\frac{4\times7}{7}+\frac{5}{7}.$$

Но мы уже видѣли, что $\frac{4\times7}{7}$ равны 4, а потому

$$\frac{33}{7}=4+\frac{5}{7}.$$

Когда получаютъ такимъ образомъ изъ дроби бо́льшей единицы цѣлое число и дробь меньшую единицы, то говорятъ: что *исключаютъ* изъ дроби цѣлое число.

Примѣчаніе. Изъ предъидущаго очевидно, что если числитель какой нибудь дроби дѣлимъ на своего знаменателя, то частное отъ этого дѣленія будетъ равно этой дроби.

143. Наоборотъ, мы всегда можемъ привести въ форму простой дроби результатъ, происшедшій отъ прибавленія дроби къ цѣлому числу. На примѣръ $4+\frac{5}{7}$. Приводя цѣлое 4 въ дробь, у которой знаменатель равенъ 7, получимъ:

$$4+\frac{5}{7}=\frac{4\times7}{7}+\frac{5}{7};$$

т. е. $4+\frac{5}{7}$ состоитъ изъ 4×7 седьмыхъ и еще изъ 5 седьмыхъ; т. е. изъ $4\times7+5$ седьмыхъ, и получимъ:

$$4+\frac{5}{7}=\frac{4\times7+5}{7}=\frac{33}{7}.$$

Такимъ образомъ, *чтобы привести цѣлое число съ дробью въ одну дробь, должно цѣлое число умножить на знаменателя данной при цѣломъ числѣ дроби, прибавить къ произведенію числителя и подъ результатомъ подписать знаменателя данной дроби.*

Основныя свойства дробей.

144. Теорема I.—*Если двѣ дроби имѣютъ одинаковаго знаменателя, то бо́льшей дробью будетъ та, у которой будетъ бо́льшій числитель. Если же двѣ дроби имѣютъ равныхъ числителей, то бо́льшей дробью будетъ та, у которой будетъ меньшій знаменатель.*

1°. Возьмемъ двѣ дроби:

$$\frac{8}{13}\text{ и }\frac{9}{13},$$

Эти дроби произошли отъ раздѣленія единицы на 13 равныхъ частей; первая содержитъ въ себѣ 8 такихъ частей, а вторая—9; стало быть первая дробь менѣе второй.

2°. Если будутъ дроби

$$\frac{13}{8} \text{ и } \frac{13}{9},$$

то каждая изъ этихъ дробей представляетъ собою совокупность 13 разныхъ частей единицы; части въ первой восьмыя, а во второй онѣ мельче, потому что девятыя; поэтому первая дробь болѣе второй.

145. Теорема II.—*Если мы числителя какой нибудь дроби сдѣлаемъ въ извѣстное число разъ бо́льшимъ или меньшимъ, то полученная дробь будетъ во столько же разъ больше или меньше прежней.*

1°. Возьмемъ дробь $\frac{5}{7}$; умножая ея числителя на 10, мы получаемъ дробь $\frac{5\times10}{7}$ и говоримъ, что эта вторая дробь въ 10 разъ болѣе первой.

Дѣйствительно, каждая изъ этихъ дробей произошла отъ дѣленія единицы на 7 равныхъ частей; первая изъ дробей содержитъ 5 такихъ частей, вторая 5×10 т. е. въ десятеро больше; стало быть вторая дробь въ десять разъ болѣе первой.

2°. Возьмемъ дробь $\frac{50}{7}$ или $\frac{5\times10}{7}$; раздѣляя ея числителя на 10, мы получимъ дробь $\frac{5}{7}$ и говоримъ, что эта вторая дробь въ десятеро менѣе нежели первая.

Дѣйствительно, числитель дроби $\frac{5\times10}{7}$ въ десять разъ болѣе числителя дроби $\frac{5}{7}$; дробь $\frac{5\times10}{7}$, основываясь на предъидущемъ, въ 10 разъ болѣе $\frac{5}{7}$; другими словами, $\frac{5}{7}$ въ десять разъ менѣе чѣмъ $\frac{5\times10}{7}$.

146. Теорема III.—*Если мы сдѣлаемъ знаменателя какой нибудь дроби бо́льшимъ или меньшимъ въ извѣстное число разъ, то полученная дробь во столько же разъ будетъ меньше или больше прежней.*

1°. Пусть будетъ дробь $\frac{5}{7}$; умножая ея знаменателя на 10,

мы получаемъ дробь $\frac{5}{7\times10}$, и говоримъ, что вторая дробь въ 10 разъ менѣе первой.

Дѣйствительно, чтобы получить первую дробь, единицу дѣлятъ на 7 равныхъ частей и берутъ такихъ частей 5; для второй же дроби, единицу дѣлятъ на 7×10 равныхъ частей и берутъ такихъ частей тоже 5. Поэтому во второмъ случаѣ число частей въ единицѣ будетъ въ 10 разъ больше чѣмъ въ первомъ, а стало быть эти части въ 10 разъ будутъ мельче первыхъ; слѣдовательно вторая дробь будетъ въ 10 разъ меньше чѣмъ первая.

2°. Имѣемъ дробь $\frac{5}{70}$, или $\frac{5}{7\times10}$; раздѣляя ея знаменателя на 10, мы получимъ дробь $\frac{5}{7}$, и говоримъ, что эта послѣдняя будетъ въ 10 разъ больше нежели первая.

Дѣйствительно, знаменатель дроби $\frac{5}{7\times10}$ въ 10 разъ болѣе нежели въ дроби $\frac{5}{7}$; дробь $\frac{5}{7\times10}$, по предъидущему, въ 10 разъ менѣе $\frac{5}{7}$; другими словами, $\frac{5}{7}$ въ 10 разъ болѣе дроби $\frac{5}{7\times10}$.

147. Теорема IV.—*Дробь величины своей не измѣнитъ, если мы умножимъ или раздѣлимъ оба ея члена на одно и тоже число.*

1°. Дана дробь $\frac{5}{7}$; умножая оба ея члена на 10, мы получимъ новую дробь $\frac{5\times10}{7\times10}$ и говоримъ, что

$$\frac{5}{7}=\frac{5\times10}{7\times10}.$$

Дѣйствительно, если мы умножимъ только одинъ числитель дроби $\frac{5}{7}$ на 10, то получимъ дробь $\frac{5\times10}{7}$, которая въ 10 разъ болѣе $\frac{5}{7}$. Умножая потомъ знаменателя той же дроби на 10, мы получимъ дробь $\frac{5\times10}{7\times10}$, которая будетъ въ 10 разъ меньше чѣмъ $\frac{5\times10}{7}$. Дроби же $\frac{5}{7}$ и $\frac{5\times10}{7\times10}$, каждая будетъ въ 10 разъ менѣе $\frac{5\times10}{7}$; стало быть онѣ будутъ равны.

2°. Дана дробь $\frac{50}{70}$, или $\frac{5\times10}{7\times10}$; раздѣляя оба ея члена на 10, получимъ новую дробь $\frac{5}{7}$, и говоримъ, что

$$\frac{5\times10}{7\times10}=\frac{5}{7}.$$

Дѣйствительно, дробь $\frac{5\times10}{7\times10}$ получится, когда мы умножимъ оба члена дроби $\frac{5}{7}$ на 10, а по предъидущему эти дроби равны.

О дробяхъ несократимыхъ. Приведеніе дробей въ простѣйшій видъ.

148. Дробь называется *несократимою*, когда она не равна какой нибудь дроби, у которой оба члена выражены сравнительно числами меньшими чѣмъ у нея самой.

Приведеніе дроби въ простѣйшій видъ есть нахожденіе несократимой дроби равной данной.

Теорема I.—*Оба члена несократимой дроби суть числа первыя между собою.*

Дѣйствительно, если оба члена какой нибудь дроби не будутъ числами первыми между собою, то, раздѣляя какъ одинъ такъ и другой на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, мы тѣмъ величины дроби не измѣнимъ (§ 147); но приведемъ ее въ простѣйшій видъ.

149. Теорема II.—*Если какая нибудь дробь, которой оба члена суть первые между собою, равна другой дроби, то оба члена послѣдней суть кратныя числа членамъ первой.*

Пусть дана дробь $\frac{7}{8}$, у которой оба члена суть первые между собою, и предположимъ, что эта дробь будетъ равна другой дроби, которой числителя мы изобразимъ чрезъ a, а знаменателя чрезъ b; тогда будетъ

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{8}.$$

Умножимъ оба члена первой дроби на 8 и оба члена послѣдней на b, величина дробей оттого не измѣнится и мы получимъ, что

$$\frac{a\times8}{b\times8} = \frac{7\times b}{8\times b}.$$

Но, такъ какъ эти дроби имѣютъ знаменателей равныхъ и сами равны, то числители ихъ тоже будутъ равны т. е.

$$a\times8 = 7\times b.$$

Изъ этого видно, что 7, будучи дѣлителемъ произведенія $7\times b$, раздѣлитъ точно также и равное произведеніе $a\times8$,

но 7 первое число съ 8 по предположенію; стало быть оно будетъ дѣлить a. Слѣдовательно

$$a = 7 \times m,$$

гдѣ m есть частное отъ дѣленія a на 7. Если мы вставимъ $7 \times m$ вмѣсто a въ равенство $a \times 8 = 7 \times b$, то будетъ

$$7 \times m \times 8 = 7 \times b,$$

и наконецъ, раздѣливъ оба эти равныя произведенія на 7, получимъ, что

$$m \times 8 = b.$$

Стало быть очевидно, что a и b суть послѣдовательныя произведенія 7 и 8 на одно и тоже число m, а это и значитъ, какъ сказано, что a и b суть числа кратныя 7 и 8.

Слѣдствіе I.—*Дробь, у которой оба члена числа первыя между собою, несократима.*

Ибо по предъидущей теоремѣ, всякая дробь, равная какой нибудь дроби, у которой оба члена первые между собою, имѣетъ у себя члены соотвѣтственно въ нѣсколько разъ большіе чѣмъ у той.

Слѣдствіе II.—*Чтобы привести дробь къ ея простѣйшему виду, должно найти общій наибольшій дѣлитель для обоихъ ея членовъ и раздѣлить на него какъ тотъ, такъ и другой.*

Потому что, поступая такъ, мы получимъ дробь равную предложенной и несократимую, ибо оба ея члена будутъ числа первыя между собою.

Слѣдствіе III.—*Чтобы составить всѣ дроби равныя какой нибудь несократимой дроби, должно оба ея члена послѣдовательно умножать на 1, 2, 3... и т. д.*

150. Въ практикѣ часто приводятъ дроби къ ихъ простѣйшему виду, послѣдовательнымъ исключеніемъ изъ числителя и знаменателя ихъ общихъ множителей, и когда, послѣ этихъ дѣйствій, оба члена дроби получатся числами первыми между собою, то приводимая дробь получитъ свой простѣйшій видъ. Возьмемъ, напримѣръ, дробь $\frac{252}{396}$; исключая изъ обоихъ членовъ общаго множителя 2, получимъ дробь $\frac{126}{198}$. Здѣсь оба члена еще дѣлятся на 2, то исключивъ и этаго дѣлителя, получимъ $\frac{63}{99}$. Наконецъ, оба члена этой дроби дѣлятся на 9, дѣлимъ ихъ и получаемъ $\frac{7}{11}$. Такъ какъ

7 и 11 суть числа первыя между собою, то данная дробь получилась приведенною къ своему простѣйшему виду (*).

Сокращеніе дробей, или приведеніе ихъ къ простѣйшему виду, дѣйствіе весьма необходимое. Необходимость его видна изъ того, что удобнѣе имѣть числа, надъ которымъ мы должны будемъ производить дѣйствія, по возможности меньшими.

Приведеніе дробей къ общему знаменателю.

151. *Приводить дроби къ общему знаменателю* значитъ находить другія дроби, соотвѣтственно равныя первымъ, но имѣющія одинаковаго знаменателя.

Общее правило для этого дѣйствія слѣдующее:

1° *Чтобы привести двѣ дроби къ общему знаменателю, должно оба члена каждой изъ нихъ помножить на знаменателя другой.*

Дѣйствительно, полученныя такимъ образомъ новыя дроби будутъ равны первымъ (§ 147) и знаменателемъ у каждой будетъ произведеніе знаменателей обѣихъ.

Прилагая это правило къ двумъ дробямъ

$$\frac{5}{7} \text{ и } \frac{3}{4},$$

получимъ

$$\frac{5\times4}{7\times4} \text{ и } \frac{3\times7}{4\times7},$$

или производя дѣйствія,

$$\frac{20}{28} \text{ и } \frac{21}{28}.$$

2°. *Чтобы привести три, или большее число дробей къ общему знаменателю, должно умножить оба члена каждой изъ нихъ на произведеніе знаменателей прочихъ.*

(*) Еще лучше, руководствуясь признаками дѣлимости чиселъ и § 125, сокращать дроби такъ: зная, что дробь $\frac{252}{396}$ сокращается на 4 т. е. на 2×2, прямо дѣлить оба ея члена на 4, а потомъ на 9. Или дробь $\frac{168}{504}$ сократить сначала на 4, потомъ на 6, ибо она сокращается и на 2 и на 3, наконецъ на 7. Ясно, что этимъ дѣйствіе ускорится и умственныя дѣленія на подобныя числа не трудны. (Прим. перев.).

Приложимъ это правило къ тремъ дробямъ:

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{13}{14},$$

мы получимъ

$$\frac{5\times4\times14}{7\times4\times14}, \quad \frac{3\times7\times14}{4\times7\times14}, \quad \frac{13\times7\times4}{14\times7\times4}$$

производя дѣйствія,

$$\frac{280}{392}, \quad \frac{294}{392}, \quad \frac{364}{392}.$$

152. При вычисленіяхъ, приведеніе дробей къ общему знаменателю встрѣчается весьма часто. На первый разъ, для примѣра, положимъ, что намъ нужно сравнить между собою дроби. Но этого мы достигнемъ только тогда, когда предварительно приведемъ данныя дроби къ одному знаменателю. Напримѣръ, желательно знать, какая изъ двухъ дробей бо́льшая, $\frac{6}{7}$ или $\frac{11}{13}$ Приводя эти дроби къ общему знаменателю, мы получаемъ $\frac{78}{91}$ и $\frac{77}{91}$. Теперь мы уже непосредственно видимъ, что первая дробь болѣе второй.

Приведеніе дробей къ наименьшему общему знаменателю.

153. Если поступать по предъидущему, то не всѣ вообще дроби, надъ которыми производятся вычисленія, приведутся къ возможно наименьшему общему знаменателю. Правило, для приведенія дробей къ наименьшему общему знаменателю, заключается въ слѣдующей теоремѣ.

Теорема.—*Наименьшій общій знаменатель, къ которому должны быть приведены несократимыя дроби, есть наименьшее кратное изъ ихъ знаменателей.*

Дѣйствительно, возьмемъ три несократимыя дроби

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''}.$$

Всякая дробь равная $\frac{a}{b}$, или $\frac{a'}{b'}$, или $\frac{a''}{b''}$, получится (§ 149, слѣдствіе II), если оба члена каждой изъ данныхъ дробей умножить на одно и тоже какое нибудь цѣлое число и очевидно, что наименьшій общій знаменатель, къ которому должно привести данныя дроби, есть общее кратное всѣхъ знаменателей b, b', b''.

Кромѣ того говоримъ, что и m, изображающее наименьшее общее кратное знаменателей b, b', b'', можетъ привести данныя дроби къ общему знаменателю равному m. Дѣйствительно, раздѣливъ m на b, на b', на b'', и изобразивъ чрезъ q, q', q'', полученныя частныя; далѣе, умноживъ оба члена первой дроби на q, оба члена второй на q' и оба члена третьей на q'', получимъ

$$\frac{aq}{bq}, \frac{a'q'}{b'q'}, \frac{a''q''}{b''q''};$$

или

$$\frac{aq}{m}, \frac{a'q'}{m}, \frac{a''q''}{m}.$$

Такимъ образомъ данныя дроби будутъ приведены къ общему знаменателю m.

154. Изъ предложенной теоремы вытекаетъ слѣдующее правило.

Чтобы привести дроби къ наименьшему общему знаменателю, начинаютъ съ приведенія каждой дроби къ ея простѣйшему виду. Въ дробяхъ, такимъ образомъ упрощенныхъ, отыскиваютъ наименьшее общее кратное число ихъ знаменателямъ и умножаютъ оба члена каждой дроби на частное, полученное отъ дѣленія наименьшаго кратнаго числа на знаменателя той же дроби.

Примѣръ I.—Даны несократимыя дроби

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{24}.$$

Знаменатель въ послѣдней дроби 24 дѣлится на каждаго изъ прочихъ знаменателей. Раздѣляя 24 на нихъ, получимъ частныя:

$$8,\ 6,\ 2,\ 1;$$

это тѣ числа, на которыя должно соотвѣтственно умножать оба члена каждой изъ предложенныхъ дробей. Вычисляя получимъ:

$$\frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{10}{24}, \frac{7}{24}.$$

Примѣръ II.—Даны несократимыя дроби

$$\frac{113}{360}, \frac{317}{540}, \frac{229}{648}.$$

Чтобы имѣть наименьшее общее трехъ знаменателей, мы разложимъ каждаго ихъ нихъ на первоначальныхъ множителей, и будетъ.

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5,$$
$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5,$$
$$648 = 2^3 \times 3^4.$$

Наименьшее общее кратное число для этихъ чиселъ будетъ

$$2^3 \times 3^4 \times 5, \text{ или } 3240;$$

раздѣляя его на каждаго изъ знаменителей, найдемъ частныя

$$3^2,\ 2 \times 3,\ 5,$$

т. е.

$$9,\ 6,\ 5.$$

Это тѣ числа, на которыя должно соотвѣтственно умножить оба члена данныхъ дробей. Производя вычисленіе найдемъ:

$$\frac{1017}{3240},\ \frac{1902}{3240},\ \frac{1145}{3240}.$$

Измѣненіе, которому подвергается всякая дробь, когда къ обоимъ ея членамъ будетъ придано одно и тоже число.

155. Теорема.—*Если придать одно и тоже число къ обоимъ членамъ какой нибудь дроби, то дробь увеличится или уменьшится, смотря потому, будетъ ли она менѣе, или болѣе единицы. Въ обоихъ случаяхъ дробь приблизится къ единицѣ.*

1°. Возьмемъ $\frac{5}{7}$, дробь меньшую единицы; если придадимъ одно и тоже число m къ обоимъ ея членамъ, то получимъ новую дробь $\frac{5+m}{7+m}$ и говоримъ, что

$$\frac{5+m}{7+m} > \frac{5}{7}.$$

Дѣйствительно, приводя двѣ дроби

$$\frac{5+m}{7+m} \text{ и } \frac{5}{7}$$

къ общему знаменателю, по правилу § 151, будетъ

$$\frac{5\times7+m+7}{7\times(m+7)},\ \frac{5\times7+m\times5}{7\times(m+7)}.$$

Такъ какъ оба числителя имѣютъ по общей части 5×7, а другая часть $m\times7$ перваго болѣе второй части $m\times5$ вто-

раго, то и первая дробь, какъ имѣющая большаго числителя будетъ болѣе второй.

2°. Возьмемъ $\frac{7}{5}$ дробь бо́льшую единицы; если придадимъ какое нибудь число m къ обоимъ ея членамъ, то получимъ новую дробь $\frac{7+m}{5+m}$ и говоримъ, что

$$\frac{7+m}{5+m} < \frac{7}{5}.$$

Дѣйствительно, приводя эти двѣ дроби

$$\frac{7+m}{5+m} \text{ и } \frac{7}{5}$$

къ одному знаменателю, по правилу § 151, будетъ

$$\frac{7\times5+m\times5}{5\times(5+m)} \text{ и } \frac{7\times5+m\times7}{5\times(5+m)}.$$

Такъ какъ оба числителя имѣютъ по общей части 7×5, а другая часть перваго $m\times5$ менѣе второй части втораго $m\times7$, то и первая дробь, какъ имѣющая меньшаго числителя, будетъ менѣе второй дроби.

Слѣдствіе.—*Если отнять одно и тоже число отъ обоихъ членовъ какой нибудь дроби, то эта дробь уменьшится или увеличится, смотря потому, будетъ ли она меньше или больше единицы. Въ обоихъ случаяхъ дробь удаляется отъ единицы.*

Упражненія.

1) Дано нѣсколько дробей съ общимъ знаменателемъ; какъ узнать, могутъ ли быть приведены эти дроби къ наименьшему общему знаменателю?

2) Какъ приводятъ двѣ или нѣсколько дробей къ общему числителю, или къ наименьшему общему числителю?

3) Доказать, что если почленно сложить двѣ равныя дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$, то новая дробь $\frac{a+a'}{b+b'}$ отъ того происшедшая, будетъ равна каждой изъ первыхъ дробей.

4) Доказать, что если сложить почленно двѣ неравныя дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$, то новая дробь $\frac{a+a'}{b+b'}$ отъ того происшедшая, будетъ заключаться между двумя данными дробями.

5) Доказать, что если сложить почленно какое нибудь число равныхъ дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, $\frac{a'''}{b'''}$ и т. д., то новая дробь $\frac{a+a'+a''+\ldots\ldots}{b+b'+b''+\ldots\ldots}$ будетъ равна каждой изъ данныхъ.

6) Доказать, что если сложить почленно какое нибудь число дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, изъ которыхъ не всѣ будутъ равны между собою, то новая дробь $\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}$ будетъ заключаться между наибольшей и наименьшей изъ предложенныхъ дробей.

ГЛАВА II.

ДѢЙСТВІЯ НАДЪ ЧИСЛАМИ ЦѢЛЫМИ И ДРОБНЫМИ.

Сложеніе.—Вычитаніе.—Умноженіе.—Дѣленіе.—Произведеніе нѣсколькихъ множителей.—Степени дробей.—Теоремы относящіяся къ дѣйствіямъ.—Приложенія теоріи дробей.—Объобщеніе теоріи дробей.

Сложеніе.

136. *Сложеніе вообще есть дѣйствіе имѣющее цѣлью находить число, заключающее въ себѣ всѣ единицы и части единицъ, содержащіяся въ двухъ или нѣсколькихъ данныхъ числахъ.*

Результатъ этого дѣйствія называется *суммою*.

Мы разсмотримъ различные случаи, встрѣчающіеся при сложеніи нѣсколькихъ чиселъ, когда они не всѣ цѣлыя.

137. Сложеніе нѣсколькихъ дробей. 1°. *Чтобы сложить дроби съ одинаковыми знаменателями, должно сложить ихъ числителей, а знаменателемъ результата взять общаго знаменателя.*

Положимъ, напримѣръ, что требуется сложить три дроби.

$$\frac{3}{13}\quad\frac{7}{13}\quad\frac{11}{13}$$

Искомая сумма составится изъ всѣхъ тринадцатыхъ частей заключающихся въ этихъ дробяхъ; она будетъ заключать въ себѣ $3+7+11$; а потому

$$\frac{3}{13}+\frac{7}{13}+\frac{11}{13}=\frac{3+7+11}{13}=\frac{21}{13}$$

или исключая цѣлое число, находящееся въ суммѣ,

$$\frac{3}{13}+\frac{7}{13}+\frac{11}{13}=1+\frac{8}{13}.$$

2°. *Чтобы сложить дроби съ разными знаменателями, приводятъ ихъ прежде къ общему знаменателю, а потомъ поступаютъ, какъ было показано.*

Пусть, напримѣръ, даны дроби

$$\frac{3}{5},\ \frac{7}{10},\ \frac{2}{3}.$$

Приводя къ наименьшему общему знаменателю, который есть 30, мы ихъ преобразуемъ въ

$$\frac{18}{30},\ \frac{21}{30},\ \frac{20}{30};$$

а потому

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{2}{3}=\frac{18+21+20}{30}=\frac{59}{30},$$

исключивъ изъ суммы цѣлое число,

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{2}{3}=1+\frac{29}{30}.$$

138. Сложеніе нѣсколькихъ чиселъ, состоящихъ изъ цѣлаго и дроби.—*Для сложенія чиселъ, состоящихъ изъ части цѣлой и части дробной, складываютъ цѣлыя, а потомъ дробныя числа, и объ суммы соединяютъ въ одну.*

Возьмемъ, для примѣра, три числа

$$4+\frac{3}{5},\ 3+\frac{7}{10},\ 8+\frac{2}{3}.$$

Сумма цѣлыхъ будетъ $4+3+8=15$; сумма дробей $\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{2}{3}$ равна $1+\frac{29}{30}$, а потому

$$\left(4+\frac{3}{5}\right)+\left(3+\frac{7}{10}\right)+\left(8+\frac{2}{3}\right)=15+\left(1+\frac{29}{30}\right),$$

или

$$\left(4+\frac{3}{5}\right)+\left(3+\frac{7}{10}\right)+\left(8+\frac{2}{3}\right)=16+\frac{29}{30}.$$

Примѣчаніе.—Вмѣсто того, чтобы поступать такъ какъ мы указали, можно приводить въ дробь каждое изъ слагаемыхъ и тѣмъ подвести дѣйствіе подъ случай § 157.

Вычитаніе.

159. *Вычитаніе вообще есть дѣйствіе, имѣющее цѣлью отнять отъ какого нибудь даннаго числа всѣ единицы и части единицы заключающіяся въ другомъ данномъ числѣ.*

Результатъ дѣйствія называется *остаткомъ, избыткомъ или разностію.*

Такъ какъ мы уже замѣтили въ цѣлыхъ числахъ, что если остатокъ при вычитаніи придать къ меньшему изъ

данныхъ чиселъ, то получимъ большее число; поэтому мы можемъ сказать что:

Вычитаніе имѣетъ цѣлью, по данной суммѣ двухъ частей и одной изъ этихъ частей найти другую часть.

Очевидно, что вычитаніе есть обратное дѣйствіе сложенію.

Мы будемъ разсматривать различные случаи встрѣчающіяся при вычитаніи двухъ чиселъ, когда онѣ не всѣ цѣлыя.

160. Вычитаніе двухъ дробей.—1⁰ *Чтобы вычесть двѣ дроби одну изъ другой съ одинаковыми знаменателями, должно вычесть числителей, а знаменателемъ въ результатѣ написать общаго знаменателя.*

Положимъ, для примѣра, что требуется вычесть $\frac{3}{13}$ изъ $\frac{8}{13}$. По правилу должно отнять 3 тринадцатыхъ отъ 8 тринадцатыхъ т. е. вычесть 8—3, имѣемъ

$$\frac{8}{13}-\frac{3}{13}=\frac{8-3}{13}=\frac{5}{13}.$$

2⁰. *Чтобы вычесть двѣ дроби одну изъ другой съ разными знаменателями, должно прежде привести ихъ къ общему знаменателю, а далѣе поступать по предъидущему.*

Положимъ, для примѣра, что требуется вычесть $\frac{3}{4}$ изъ $\frac{11}{12}$. Приводя эти дроби къ общему наименьшему знаменателю, который будетъ 12, получимъ

$$\frac{9}{12},\quad \frac{11}{12},$$

или

$$\frac{11}{12}-\frac{3}{4}=\frac{11}{12}-\frac{9}{12}=\frac{2}{12},$$

приводя $\frac{2}{12}$ къ простѣйшему виду получимъ

$$\frac{11}{12}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}.$$

161. Вычитаніе двухъ чиселъ состоящихъ изъ части цѣлой и дробной.—*Чтобы вычесть одно изъ другаго два числа состоящихъ изъ части цѣлой и дробной, должно произвести вычитаніе надъ цѣлыми, а потомъ надъ дробями, и сложить двѣ полученныя разности.*

Положимъ, для примѣра, что требуется $5+\frac{3}{4}$ вычесть изъ $9+\frac{11}{12}$. Вычитаемъ 5 изъ 9, что даетъ 4, потомъ $\frac{3}{4}$ изъ $\frac{11}{12}$

что даетъ $\frac{1}{6}$; полученная разность есть $4+\frac{1}{6}$; и такъ

$$\left(9+\frac{11}{12}\right)-\left(5+\frac{3}{4}\right)=4+\frac{1}{6}.$$

Примѣчаніе I.—Можетъ встрѣтиться, что дробь вычитаемаго будетъ болѣе дроби уменьшаемаго, въ этомъ случаѣ, правило нами указанное неприложимо. Но затрудненіе это легко можно устранить, приведя въ дробь одну изъ единицъ большаго изъ данныхъ чиселъ.

Положимъ, напримѣръ, что намъ требуется вычесть $5+\frac{3}{4}$ изъ $9+\frac{5}{12}$, или $5+\frac{9}{12}$ изъ $9+\frac{5}{12}$. Приводимъ въ двѣнадцатыя доли одну изъ девяти единицъ большаго числа, тогда вопросъ обращается въ вычитаніе $5+\frac{9}{12}$ изъ $8+\frac{17}{12}$ что даетъ въ остаткѣ $3+\frac{8}{12}$. А потому

$$\left(9+\frac{5}{12}\right)-\left(5+\frac{3}{4}\right)=3+\frac{8}{12},$$

или, приводя $\frac{8}{12}$ въ простѣйшій видъ,

$$\left(9+\frac{5}{12}\right)-\left(5+\frac{3}{4}\right)=3+\frac{2}{3}.$$

Примѣчаніе II.—Точно также, для вычитанія одного изъ другаго двухъ цѣлыхъ чиселъ, сопровождаемыхъ каждое дробью, можно цѣлыя числа перевести въ дроби и такимъ образомъ вопросъ подвести подъ случай § 160.

Умноженіе.

162. *Умножить какое нибудь число на число цѣлое, значитъ, составить сумму изъ столькихъ слагаемыхъ равныхъ первому числу, сколько единицъ будетъ въ цѣломъ.*

Умножить какое нибудь число на дробь, значитъ, раздѣлить это число на столько равныхъ частей, сколько будетъ единицъ въ знаменатель дроби и взять столько такихъ частей, сколько будетъ единицъ въ числитель.

Напримѣръ, умножить $\frac{3}{7}$ на 4, значитъ составить сумму изъ 4 чиселъ равныхъ $\frac{3}{7}$. Умножить $\frac{3}{7}$ на $\frac{2}{3}$, значитъ,

раздѣлить $\frac{5}{7}$ на 3 равныхъ части и взять 2 такихъ части; другими словами, должно взять два раза *треть* $\frac{5}{7}$, или *двѣ трети* $\frac{5}{7}$.

Во всѣхъ случаяхъ число, которое множится, называется *множимымъ*, число на которое множатъ *множителемъ*, результатъ этого дѣйствія *произведеніемъ*.

Изъ предъидущихъ опредѣленій видно, что произведеніе будетъ больше, равно, или меньше множимаго тогда, когда соотвѣтственно множитель будетъ больше, равенъ, или меньше единицы.

163. Умноженіе дроби на цѣлое.—*Чтобы умножить дробь на цѣлое, должно умножить числителя дроби на цѣлое.*

Дѣйствительно, положимъ, что требуется умножить $\frac{5}{7}$ на 4; значитъ должно составить сумму изъ 4 чиселъ равныхъ $\frac{5}{7}$, или найдти число въ 4 раза большее числа $\frac{5}{7}$. Но дробь въ 4 раза большая получится (§ 145), если умножить числителя на 4, а потому

$$\frac{5}{7} \times 4 = \frac{5 \times 4}{7},$$

что и слѣдовало доказать.

164. Умноженіе цѣлаго на дробь.—*Чтобы умножить цѣлое на дробь, должно умножить цѣлое на числителя дроби, а знаменателемъ результата взять знаменателя дроби.*

Дѣйствительно, положимъ, что требуется умножить 4 на $\frac{5}{7}$; значитъ, должно взять 5 разъ седьмую часть 4. Но 4 равно $\frac{4 \times 7}{7}$, и чтобы взять седьмую часть должно раздѣлить числителя на 7 (§ 145), что дастъ $\frac{4}{7}$. За тѣмъ этотъ результатъ должно взять 5 разъ, тогда получимъ искомое произведеніе, а потому

$$4 \times \frac{5}{7} = \frac{4}{7} \times 5$$

или (§ 163)

$$4 \times \frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{7},$$

что и слѣдовало доказать.

Примѣчаніе.—Мы видимъ въ § 163, что дробь $\frac{4\times5}{7}$, или $\frac{5\times4}{7}$ есть произведеніе $\frac{5}{7}$ на 4, стало быть

$$4\times\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\times4,$$

а потому *произведеніе двухъ множителей, одного цѣлаго, а другаго дробнаго, будетъ оставаться тоже самое какой бы множитель не былъ принятъ за множимое.*

165. Умноженіе двухъ дробей.—*Чтобы перемножить двѣ дроби, должно соотвѣтственно перемножить ихъ члены.*

Дѣйствительно, положимъ, что требуется $\frac{5}{7}$ умножить на $\frac{4}{9}$. Это значитъ, должно взять 4 раза девятую часть $\frac{5}{7}$. Но девятая часть $\frac{5}{7}$ есть дробь въ 9 разъ меньшая $\frac{5}{7}$, и получится, умноживъ знаменателя $\frac{5}{7}$ (§ 146), что составитъ $\frac{5}{7\times9}$. Затѣмъ, чтобы получить искомое произведеніе, должо эту дробь взять 4 раза, а потому

$$\frac{5}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{5\times4}{7\times9}$$

что и слѣдовало доказать.

Примѣчаніе.—Произведеніе двухъ дробей не измѣнится, какую бы дробь не приняли за множимое.

Дѣйствительно, пусть даны двѣ дроби $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{9}$; мы уже знаемъ, что

$$\frac{5}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{5\times4}{7\times9},$$
$$\frac{4}{9}\times\frac{5}{7}=\frac{4\times5}{9\times7},$$

Эти два произведенія равны потому что

$$5\times4=4\times5 \text{ и } 7\times9=9\times7.$$

166. Умноженіе двухъ чиселъ состоящихъ изъ части цѣлой и дробной.—*Чтобы умножить два числа состоящихъ изъ части цѣлой и дробной, должно каждое изъ чиселъ привести въ дробь и тогда останется поступать по предъидущему.*

Пусть, для примѣра, $4+\frac{3}{7}$ требуется умножить на $8+\frac{4}{9}$

Имѣемъ:

$$4+\frac{3}{7}=\frac{31}{7},$$
$$8+\frac{4}{9}=\frac{76}{9},$$

поэтому

$$\left(4+\frac{3}{7}\right)\times\left(8+\frac{4}{9}\right)=\frac{31\times 76}{7\times 9}=\frac{2356}{63},$$

исключивъ цѣлое число заключающееся въ произведеніи,

$$\left(4+\frac{3}{7}\right)\times\left(8+\frac{4}{9}\right)=37+\frac{25}{63}.$$

Дѣленіе.

167. *Дѣленіе вообще есть дѣйствіе, имѣющее цѣлью, по данному произведенію двухъ множителей и одному изъ нихъ, найти другой множитель.*

Данное произведеніе называется *дѣлимымъ*, данный множитель—*дѣлителемъ*, искомый множитель—*частнымъ*.

Всегда, чтобы обозначить частное какого нибудь дѣленія, пишутъ дѣлимое, потомъ дѣлителя и ставятъ между ними знакъ :, который нами уже употреблялся.

Изъ нашего опредѣленія видно, что дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію. Приступимъ къ разсмотрѣнію различныхъ случаевъ, встрѣчающихся при этомъ.

168. Дѣленіе цѣлыхъ чиселъ.—Предварительно изслѣдуемъ, согласно ли предъидущее опредѣленіе, относящееся къ частному случаю дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ, съ опредѣленіемъ даннымъ нами въ § 43. До сихъ поръ, *частнымъ* двухъ цѣлыхъ чиселъ мы называли наибольшее число разъ повторяемости дѣлителя въ дѣлимомъ. Если дѣленіе бывало точное т. е. оконченное, то дѣлимое равнялось произведенію дѣлителя на частное; а потому, въ этомъ случаѣ, *дѣленіе, какъ мы сейчасъ его объяснили, дѣйствительно имѣетъ цѣлью по данному произведенію двухъ множителей и одному изъ нихъ найти другаго множителя.* Такимъ образомъ, наше первое опредѣленіе не противорѣчитъ съ общимъ опредѣленіемъ, предложеннымъ нами теперь. Но этого уже не будетъ въ томъ случаѣ, когда дѣленіе цѣлыхъ чиселъ даетъ остатокъ. Тогда дѣлимое равняется произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ меньшимъ дѣлителя. Слѣдовательно, дѣлимое будетъ болѣе произведенія дѣлителя на частное и менѣе произведенія дѣлителя на частное увеличенное единицею. Если же дѣлимое дѣйствительно есть произведеніе дѣлителя на какое нибудь извѣстное число, то это число необходимо должно заключаться между полученнымъ част-

нымъ и частнымъ увеличеннымъ единицею, стало быть оно состоитъ изъ части цѣлой равной полученному частному и части дробной меньшей единицы.

Для устраненія недоразумѣнія, въ случаѣ, когда дѣленіе бываетъ съ остаткомъ, наибольшее число разъ повторяемости дѣлителя въ дѣлимомъ называютъ *цѣлымъ частнымъ*, или *цѣлою частью частнаго*; слово же *частное* вообще служитъ собственно для обозначенія того числа, на которое должно множить дѣлителя, чтобы получить дѣлимое. Правило, которое было нами предложено при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ, опредѣляло частное въ томъ случаѣ, когда дѣлимое было кратнымъ дѣлителю, и цѣлую часть частнаго въ противномъ случаѣ.

169. Теорема.— *Частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ равно дроби, имѣющей числителемъ дѣлимое, а знаменателемъ дѣлителя.*

Я говорю, напримѣръ, что частное отъ дѣленія 15 на 4 равно $\frac{15}{4}$, т. е. имѣемъ

$$15 : 4 = \frac{15}{4}.$$

Дѣйствительно, произведеніе $\frac{15}{4}$ на 4 равно $\frac{15 \times 4}{4}$, или равно 15 (§ 142, *Примѣчаніе*); а потому $\frac{15}{4}$ есть то число, на которое должно уможить дѣлителя 4, чтобы получить дѣлимое 15, а стало быть оно есть частное отъ дѣленія 15 на 4.

170. Чтобы точно вычислить частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ, должно найти цѣлую часть частнаго и дополнительную часть. Очевидно что это достигнется исключеніемъ цѣлаго изъ дроби, имѣющей числителемъ дѣлимое, а знаменателемъ дѣлителя. Если же при дѣленіи данныхъ чиселъ, слѣдуютъ обыкновенному способу, то прибавляютъ къ цѣлому частному дробь, имѣющую числителемъ остатокъ, а знаменателемъ дѣлителя и такимъ образомъ получаютъ полное частное отъ дѣленія данныхъ чиселъ (§ 142).

Положимъ; что требуется найти частное отъ дѣленія 15 на 4; имѣемъ.

$$15 : 4 = \frac{15}{4}.$$

Для исключенія цѣлаго содержащагося въ дроби $\frac{15}{4}$ дѣлимъ

15 на 4, находимъ для цѣлаго частнаго 3 и 3 въ остаткѣ, а потому (§ 142)

$$15 : 4 = 3 + \frac{3}{4}.$$

171. Оба выраженія $15 : 4$ и $\frac{15}{4}$ равнозначущи и какъ то такъ и другое употребляются безразлично.

Частное отъ дѣленія какого нибудь числа на единицу будетъ тоже самое число; основываясь на этомъ, цѣлое число можно разсматривать какъ дробь, имѣющую числителемъ это число, а знаменателемъ единицу. Такимъ образомъ, $\frac{4}{1}$ выражаетъ собою то же самое, что и 4. Этотъ частный видъ дробей подчиняется всѣмъ основнымъ свойствамъ дробей вообще; къ нимъ можно приложить теоремы § 144 и слѣдующихъ. Такъ, напримѣръ, дробь $\frac{4}{1}$ очевидно будетъ въ 10 разъ больше, если умножить ея числителя на 10, ибо получится $\frac{4 \times 10}{1}$ или 4×10. Точно также дробь $\frac{4}{1}$ будетъ въ 10 разъ менѣе, если умножить ея знаменателя на 10, ибо 10 разъ $\frac{4}{10}$ или $\frac{4 \times 10}{10}$ будетъ равна 4 (§ 142), или $\frac{4}{1}$; а дробь $\frac{4}{10}$ будетъ въ 10 разъ менѣе дроби $\frac{4}{1}$. Наконецъ очевидно также, что дробь $\frac{4}{1}$ не измѣнится, если мы оба ея члена умножимъ на 10.

172. Дѣленіе дроби на цѣлое.—*Чтобы раздѣлить дробь на цѣлое, должно ея знаменателя умножить на цѣлое число.*

Положимъ, что желательно раздѣлить $\frac{15}{7}$ на 4. Это значитъ, должно найти число, которое будучи умножено на 4 давало бы $\frac{15}{7}$, или другими словами, частное взятое 4 раза должно дать $\frac{15}{7}$; стало быть частное должно быть въ 4 раза менѣе $\frac{15}{7}$ т. е. оно будетъ найдено когда дробь $\frac{15}{7}$ будетъ уменьшена въ 4 раза, а это можно сдѣлать умноживъ (§ 146) знаменателя дроби на 4. Поэтому получимъ

$$\frac{15}{7} : 4 = \frac{15}{7 \times 4} = \frac{15}{28}.$$

Примѣчаніе.—Если числитель дроби, которую должно будетъ дѣлить на цѣлое число, будетъ кратный послѣдняго, то частное получится раздѣливъ числителя дроби на цѣлое число.

Дано $\frac{12}{7}$ раздѣлить на 4. Частное получится, если дробь $\frac{12}{7}$ уменьшить въ 4 раза, а чтобы это сдѣлать, должно (§ 145) числителя дроби раздѣлить на 4, т. е.

$$\frac{12}{7} : 4 = \frac{12:4}{7} = \frac{3}{7}.$$

473. Дѣленіе двухъ дробей.— *Чтобы раздѣлить двѣ дроби одну на другую, должно дробь дѣлимаго умножить на обратную дробь дѣлителя.*

Будемъ дѣлить $\frac{5}{7}$ на $\frac{3}{4}$. Это значитъ, что должно найти число, которое будучи умножено на $\frac{3}{4}$ было бы равно $\frac{5}{7}$; изъ этого выходитъ, что $\frac{3}{4}$ частнаго даютъ $\frac{5}{7}$, значитъ $\frac{1}{4}$ частнаго будетъ дробь въ 3 раза меньшая дроби $\frac{5}{7}$ и получится, если мы знаменателя $\frac{5}{7}$ умножимъ на 3. Итакъ $\frac{1}{4}$ частнаго равна $\frac{5}{7\times3}$, а чтобы получить четыре четверти частнаго т. е. полное частное, должно дробь $\frac{5}{7\times3}$ увеличить въ 4 раза, т. е. умножить ея числителя на 4. А потому

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{7 \times 3}.$$

Но, по правилу умноженія дробей, $\frac{5\times4}{7\times3}$ есть произведеніе двухъ дробей $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{3}$, стало быть

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3};$$

а это и выражаетъ собою предложенное правило.

Примѣчаніе I.—Предъидущее правило относится ко всѣмъ случаямъ дѣленія, потому что, если дѣлимое или дѣлитель будутъ числа цѣлыя, то ихъ можно разсматривать какъ дроби, имѣющія числителями данныя цѣлыя, а знаменателями единицы.

Примѣчаніе II.—Чтобы раздѣлить единицу на какую нибудь дробь, стоитъ только эту дробь написать въ обратномъ видѣ. Такъ, частное отъ дѣленія 1 на $\frac{5}{7}$ есть $\frac{7}{5}$. *).

174. Дѣленіе двухъ чиселъ состоящихъ изъ части цѣлой и дробной.—*Чтобы раздѣлить два числа, состоящихъ каждое изъ части цѣлой и дробной, должно привесть каждое изъ нихъ въ дробь и далѣе поступать какъ сказано.*

Дано раздѣлить $24+\frac{3}{8}$ на $5+\frac{7}{12}$. Имѣемъ

$$24+\frac{3}{8}=\frac{195}{8},\quad 5+\frac{7}{12}=\frac{67}{12};$$

по этому

$$\left(24+\frac{3}{8}\right):\left(5+\frac{7}{12}\right)=\frac{195}{8}:\frac{67}{12}=\frac{195\times 12}{67\times 8},$$

или, раздѣляя на 4 множителей 8 и 12, находящихся въ числителѣ и въ знаменателѣ результата,

$$\left(24+\frac{3}{4}\right):\left(5+\frac{7}{12}\right)=\frac{195\times 3}{67\times 2}=\frac{585}{134}=4+\frac{49}{134}.$$

Произведенія нѣсколькихъ дробей.

175. *Чтобы получить произведеніе нѣсколькихъ дробей, дроби умножаютъ почленно.*

Требуется перемножить

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}.$$

Произведеніе двухъ первыхъ дробей $\frac{2\times 5}{3\times 7}$ умножаемъ на третьяго множителя, получаемъ $\frac{2\times 5\times 3}{3\times 7\times 4}$, наконецъ, умножая это второе произведеніе на четвертаго множителя, найдемъ $\frac{2\times 5\times 3\times 7}{3\times 7\times 4\times 8}$; а потому

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}=\frac{2\times 5\times 3\times 7}{3\times 7\times 4\times 8};$$

что и слѣдовало доказать.

Примѣчаніе I.—Очевидно, что предъидущее правило приложимо и къ произведенію нѣсколькихъ множителей, изъ которыхъ, одни числа цѣлыя, а другія числа дробныя; ибо цѣлое число есть дробь имѣющая знаменателемъ единицу (§ 171).

*) Вообще, *обратное число* для числа a есть $\frac{1}{a}$, ибо $a=\frac{a}{1}$. (Пр. перев.)

Примѣчаніе II.—*Произведеніе нѣсколькихъ множителей не измѣнится отъ перемѣны мѣстъ множителей.* Это потому, что во всякомъ случаѣ, для числителя будетъ составляться произведеніе изъ числителей, а для знаменателя изъ знаменателей.

Примѣчаніе III.—Когда составляется произведеніе нѣсколькихъ дробей, то прежде чѣмъ вычислять произведенія числителей и знаменателей, должно исключить общихъ множителей въ этихъ двухъ произведеніяхъ. Такъ, произведеніе дробей $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$ будетъ $\frac{2\times5\times3\times7}{3\times7\times4\times8}$; исключимъ множителей 3 и 7 общихъ обоимъ членамъ произведенія, а также и множителя 2 въ числителѣ, раздѣляя при этомъ на 2 множителей или 4 или 8 въ знаменателѣ, послѣ такого упрощенія получимъ:

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}=\frac{5}{2\times8}=\frac{5}{16}.$$

Примѣчаніе IV.—Произведеніе $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$ равно $\frac{5}{7}$ отъ $\frac{2}{3}$ (§ 162). Слѣдовательно, произведеніе $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$ есть $\frac{3}{4}$ отъ $\frac{5}{7}$ числа $\frac{2}{3}$; точно также произведеніе $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}$ есть $\frac{7}{8}$ отъ $\frac{3}{4}$ *пяти седьмыхъ* числа $\frac{2}{3}$. Взять *дробь отъ дроби* значитъ перемножить данныя дроби.

О степеняхъ дробей.

176. Опредѣленіе § 79 приложимо какъ къ цѣлымъ числамъ такъ и къ дробямъ.

Для указанія какой нибудь степени дроби, пишутъ дробь въ скобкахъ, а показателя помѣщаютъ вправо надъ числителемъ. Такимъ образомъ $\left(\frac{5}{7}\right)^2$ и $\left(\frac{5}{7}\right)^3$ представляютъ квадратъ и кубъ $\frac{5}{7}$.

177. *Чтобы возвести дробь въ какую нибудь степень, должно въ эту степень возвести оба ея члена.*

Напримѣръ, дана дробь $\frac{5}{7}$. По правилу умноженія имѣемъ

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 \text{ или } \frac{5}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5\times5}{7\times7} \text{ или } \frac{5^2}{7^2},$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 \text{ или } \frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5\times5\times5}{7\times7\times7} \text{ или } \frac{5^3}{7^3},$$

и такъ далѣе.

178. Теорема I.—*Цѣлое число не можетъ быть степенью несократимой дроби.*

Предположимъ что 7 будетъ третья степень несократимой дроби $\frac{a}{b}$, имѣемъ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 7, \text{ или } \frac{a^3}{b^3} = 7.$$

Но a и b суть числа первыя между собою и дробь $\frac{a}{b}$ несократимая, поэтому кубы ея членовъ будутъ также первыми между собою (§ 128, Прим. II); поэтому (§ 149, Прим. I) $\frac{a^3}{b^3}$ есть дробь несократимая. Но тогда 7 ни коимъ образомъ не можетъ равняться несократимой дроби.

179. Теорема II.—*Несократимая дробь не можетъ быть степенью извѣстнаго порядка, если оба ея члена не будутъ степенями того же порядка.*

Положимъ, что несократимая дробь $\frac{A}{B}$ будетъ третья степень другой какой нибудь несократимой дроби $\frac{a}{b}$; имѣемъ

$$\frac{A}{B} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Но, какъ a и b числа первыя между собою, a^3 и b^3 тоже; поэтому и дробь $\frac{a^3}{b^3}$ будетъ несократимая. Двѣ дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{a^3}{b^3}$, будучи несократимы, могутъ быть равны только въ томъ случаѣ, когда будутъ имѣть равныхъ числителей и знаменателей т. е.

$$A = a^3 \text{ и } B = b^3,$$

что и слѣдовало доказать.

Теоремы относящіяся къ дѣйствіямъ.

180. Мы видѣли, что произведеніе нѣсколькихъ цѣлыхъ или дробныхъ множителей не измѣняетъ величины отъ перемѣны ихъ порядка. Слѣдствія выведенныя нами изъ этой основной теоремы, въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ (§ 74 и слѣдующіе), должны быть распространены на всѣ случаи, будутъ ли разсматриваемыя числа цѣлыми или дробными.

Такимъ образомъ, можно сказать вообще:

1°. *Чтобы умножить или раздѣлить какое нибудь число на произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей, должно это число множить или дѣлить на перваго множителя, полученный результатъ на втораго, и т. д., пока всѣ множители будутъ употреблены.*

2°. *Чтобы перемножить два произведенія, должно составить одно произведеніе изъ множителей множимаго и множителя.*

3°. *Въ произведеніи изъ нѣсколькихъ множителей, нѣкоторые множители можно замѣнить составленнымъ изъ нихъ произведеніемъ.*

4°. *Чтобы умножить или раздѣлить произведеніе на какое нибудь число, достаточно умножить или раздѣлить на это число одного изъ производителей.*

5°. *Чтобы перемножить двѣ или нѣсколько степеней одного и того же числа, должно сложить показателей этихъ степеней.*

6°. *Чтобы раздѣлить двѣ или нѣсколько степеней одного и того же числа, должно вычесть показателя дѣлителя изъ показателя дѣлимаго.*

7°. *Для возвышенія какой нибудь степени въ другую, должно помножить показателя первой на показателя второй.*

8°. *Чтобы произведеніе возвысить въ степень, должно въ эту степень возвысить каждаго производителя оной.*

Приложенія теоріи дробей.

181. Задача I. — *Число взрослыхъ во Франціи* 22815210, *между тѣмъ число взрослыхъ мужчинъ составляетъ* $\frac{5}{16}$ *всего народонаселенія, число же взрослыхъ женщинъ составляетъ* $\frac{16}{17}$ *числа мужчинъ. Спрашивается, какъ велико народонаселеніе во Франціи?*

По предположенію число взрослыхъ мужчинъ составляетъ $\frac{5}{16}$ народонаселенія, а число взрослыхъ женщинъ составляетъ $\frac{16}{17}$ числа мужчинъ; стало быть $\frac{16}{17}$ отъ $\frac{5}{16}$ всего народонаселенія равно $\frac{16\times 5}{17\times 16}$, или $\frac{5}{17}$ народонаселенія. Число взрослыхъ обоихъ половъ будетъ $\frac{5}{16}+\frac{5}{17}$, или $\frac{165}{272}$ народонаселенія.

Сверхъ того, оно, по предложенію, равно числу 22815210, и чтобы получить все народонаселеніе, должно 22815210 раздѣлить на $\frac{165}{272}$, что дастъ

$$\frac{272 \times 22815210}{165} = \frac{6205737120}{165} = 37610528.$$

182. Задача II. — *Нѣкоторый бассейнъ наполняется водою чрезъ два крана и имѣетъ одинъ клапанъ для выпуска воды. Если открыть одинъ первый кранъ, то бассейнъ наполнится въ $\frac{4}{5}$ часа; если отвернуть одинъ второй кранъ, то бассейнъ наполнится въ $\frac{4}{3}$ часа; наконецъ, если открыть одинъ спускной клапанъ, то бассейнъ наполненный водою можетъ осушиться въ 2 часа. Положимъ теперь, что бассейнъ пустъ и требуется узнать сколько времени будетъ достаточно, чтобы онъ наполнился, если будутъ открыты: какъ спускной клапанъ, такъ и оба крана. Прибавимъ, что вода въ этихъ трехъ отверстіяхъ бьжитъ съ одинаковою скоростью.*

Такъ какъ первый кранъ наполняетъ бассейнъ въ $\frac{4}{5}$ часа, то въ $\frac{1}{5}$ часа онъ наполнитъ только $\frac{1}{4}$ бассейна, слѣдовательно, въ 1 часъ онъ наполнитъ въ 5 разъ болѣе т. е. $\frac{5}{4}$ бассейна. Къ тому же результату мы можемъ придти и такъ. Если время, въ продолженіи котораго открытъ первый кранъ, раздѣлить на $\frac{4}{5}$, то и количество доставленной имъ воды также раздѣлится на $\frac{4}{5}$. Поэтому часть бассейна наполняемая въ одинъ часъ будетъ $1 : \frac{4}{5}$ или $\frac{5}{4}$.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, мы увидимъ, что второй кранъ въ 1 часъ наполнитъ $\frac{3}{4}$ бассейна и что спускной клапанъ осушитъ въ 1 часъ $\frac{1}{2}$ бассейна. Послѣ того часть бассейна наполняющаяся въ 1 часъ, когда открыты и клапанъ и краны, будетъ

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \text{ или } \frac{3}{2}.$$

И такъ $\frac{3}{2}$ бассейна наполняется въ 1 часъ, а значитъ

$\frac{1}{2}$ бассейна наполнится въ $\frac{1}{3}$ часа; поэтому весь бассейнъ будетъ наполненъ въ $\frac{2}{3}$ часа.

Того же результата можно достигнуть и такъ: раздѣливъ на $\frac{3}{2}$ время въ теченіи котораго краны и клапанъ остаются открытыми, наполненная часть бассейна тоже должна раздѣлиться на $\frac{3}{2}$, откуда слѣдуетъ, что бассейнъ наполнится по прошествіи времени равнаго $1 : \frac{3}{2}$ или въ $\frac{2}{3}$ часа.

Объобщеніе теоріи дробей

183. Мы видѣли, что частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ можетъ быть представлено дробью, имѣющею числителемъ дѣлимое, а знаменателемъ дѣлителя. Приложимъ тоже самое къ изображенію частнаго двухъ дробныхъ чиселъ. Такъ, частное отъ дѣленія $\frac{5}{7}$ на $\frac{2}{3}$ можетъ быть безразлично представлено, или чрезъ $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$, или чрезъ $\frac{(\frac{5}{7})}{(\frac{2}{3})}$. Значеніе дроби будетъ приложимо и къ подобнымъ частнымъ. Кромѣ того, подобная дробь всегда можетъ быть приведена въ дробь съ членами цѣлыми. Напримѣръ, $\frac{(\frac{5}{7})}{(\frac{2}{3})}$ будетъ равна $\frac{5}{7} \times \frac{3}{2}$, т. е. равна $\frac{15}{14}$.

Мы должны доказать, что всѣ правила для вычисленія дробей приложимы безъ исключеній и къ новымъ, нами разсматриваемымъ дробямъ.

Для упращенія доказательства, мы будемъ всегда обозначать одною изъ буквъ a, b, c, и т. д. числителя и знаменателя дроби. Такимъ образомъ $\frac{a}{b}$ представляетъ дробь, у которой числитель a и знаменатель b могутъ быть числами цѣлыми или дробными.

184. Теорема I.—*Дробь не измѣняетъ своей величины, если умножить или раздѣлить оба ея члена на одно и тоже цѣлое или дробное число.*

Пусть будетъ дробь $\frac{a}{b}$ и m какое нибудь цѣлое или дробное число. Я говорю, что величина дроби не измѣнится,

если оба ея члена умножить или раздѣлить на m. Дѣйствительно, пусть q будетъ величина дроби $\frac{a}{b}$ т. е. дробь имѣющая члены цѣлые, полученная отъ раздѣленія a на b, слѣдуя правилу дѣленія дробей; тогда получимъ

$$\frac{a}{b} = q,$$

отсюда

$$a = b \times q.$$

Если умножить или раздѣлить на m эти два равныя числа, то очевидно получимъ равныя результаты. Ночтобы умножить и раздѣлить на m произведеніе $b \times q$, достаточно умножить или раздѣлить множителя b на m (§ 180), а потому получимъ

$$a \times m = (b \times m) \times q \text{ и } a : m = (b : m) \times q,$$

а это показываетъ что q есть частное отъ дѣленія $a \times m$ на $b \times m$, и $a : m$ на $b : m$; стало быть

$$\frac{a \times m}{b \times m} = q = \frac{a}{b} \text{ и } \frac{a : m}{b : m} = q = \frac{a}{b},$$

что и слѣдовало доказать.

Слѣдствіе.—*Для приведенія нѣсколькихъ дробей къ общему знаменателю, должно умножить оба члена каждой дроби на произведеніе знаменателей прочихъ дробей.*

Замѣчаніе. Это слѣдствіе полезно при сложеніи и вычитаніи дробей.

185. Теорема II.—*Произведеніе двухъ дробей получится перемноживъ ихъ почленно.*

Возьмемъ двѣ дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$. Обозначимъ чрезъ q и q' величины этихъ дробей; имѣемъ

$$a = b \times q$$
$$a' = b' \times q'$$

Отсюда $a \times a'$ будетъ равно произведенію $b \times q$ на $b' \times q'$. Но чтобы умножить два произведенія, должно (§ 180) составить одно произведеніе изъ ихъ множителей и будетъ

$$a \times a' = b \times q \times b' \times q'.$$

Наконецъ въ произведеніи, находящемся во второй части, множители b и b' q и q' можно замѣнить ихъ произведеніями. Поэтому

$$a \times a' = (b \times q') \times (b \times q');$$

а изъ этого видно, что $q \times q'$ есть частное отъ дѣленія $a \times a'$ на $b \times b'$, и такъ

$$\frac{a \times a'}{b \times b'} = q \times q' = \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'},$$

что и слѣдовало доказать.

Слѣдствіе I.—*Произведеніе трехъ, четырехъ, и т. д., дробей получится по перемноженіи ихъ почленно.*

Слѣдствіе II.—*Для возвышенія дроби въ степень должно возвысить въ эту степень оба ея члена.*

186. Теорема III.—*Частное двухъ дробей получится, умноживъ дробь дѣлимаго на обращенную дробь дѣлителя.*

Даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$. Приведя эти дроби къ общему знаменателю мы найдемъ $\frac{a \times b'}{a \times b'}$ и $\frac{a' \times b}{b \times b'}$. Частное этихъ дробей не измѣнится, если мы обѣ умножимъ на $b \times b'$, тогда частное будетъ равно $a \times b' : a' \times b$, т. е. $\frac{a \times b'}{a' \times b}$. Но $\frac{a \times b'}{a' \times b}$ равно $\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'}$, слѣдовательно

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'};$$

что и слѣдовало доказать.

Упражненія.

1) Три бруска спаяны конецъ съ концомъ, одинъ мѣдный, другой свинцовый и третій оловянный, одинаковой ширины и толщины, при температурѣ таянія льда. При этой температурѣ, мѣдный брусокъ въ 37 сентиметровъ длины, свинцовый въ 49 сентим. и оловянный въ 14. Составленный спайкою брусъ послѣ возвысился температурою до кипѣнія воды; спрашивается какова тогда будетъ его длина? При этомъ извѣстно, что когда температура увеличится отъ 0 градусовъ, т. е. отъ точки замерзанія, до 100 градусовъ, т. е. до температуры кипѣнія воды; тогда мѣдный брусокъ удлиннится на $\frac{1}{582}$ долю своей длины при 0 градусовъ, свинцовый брусокъ на $\frac{1}{354}$ и оловянный на $\frac{1}{462}$.

2) Имѣется брусъ составленный изъ двухъ брусковъ спаянныхъ конецъ съ концомъ, одного свинцоваго, другаго оловяннаго; свинцовая часть въ 45 сентиметровъ длиною при температурѣ 0 градусовъ, а составленный брусъ въ 95 сентиметровъ при температурѣ 100 градусовъ. Спрашивается, какой длины будетъ оловянная часть бруса при температурѣ 0 градусовъ?

3) Резинковый мячъ подпрыгиваетъ на высоту равную $\frac{2}{9}$ той, откуда онъ былъ брошенъ; послѣ троекратнаго подпрыгиванія онъ поднялся на высоту въ $\frac{4}{11}$ сажени. Спрашивается, съ какой высоты онъ упалъ въ первый разъ?

4) Доказать, что сумма двухъ несократимыхъ дробей съ разными знаменателями никогда не можетъ быть цѣлымъ числомъ.

5) Въ какомъ случаѣ сумма трехъ несократимыхъ дробей можетъ быть цѣлымъ числомъ?

6) Доказать, что если придать одно и тоже цѣлое или дробное число къ обоимъ членамъ какой нибудь дроби, то дробь приблизится къ единицѣ.

ГЛАВА III.

ДЕСЯТИЧНЫЯ ЧИСЛА.

Опредѣленіе десятичныхъ чиселъ.—Способъ писать десятичное число.—Способъ произносить написанное десятичное число.—Обращеніе числа десятичнаго въ простую дробь.—Сложеніе десятичныхъ чиселъ.—Вычитаніе десятичныхъ чиселъ.—Умноженіе десятичныхъ чиселъ.—Дѣленіе десятичныхъ чиселъ.—Приближенное вычисленіе величинъ.—Условіе при которомъ обыкновенная дробь можетъ быть обращена въ дробь десятичную.—Обращеніе дроби обыкновенной, въ десятичную.—Періодическія десятичныя дроби.—Нахожденіе обыкновенной дроби отъ которой произошла данная десятичная періодическая дробь.

Опредѣленіе десятичныхъ чиселъ.

187. *Десятичною частью* единицы называется та, которая получается отъ раздѣленія единицы на 10, 100, 1000 и т. д. равныхъ частей. Отъ этаго будутъ получаться части *десятыя, сотыя, тысячныя*, и т. д. Ихъ называютъ также *единицами десятичныхъ порядковъ*; такимъ образомъ *десятыя* есть единицы перваго десятичнаго порядка, *сотыя*—единицы втораго десятичнаго порядка и т. д.

Очевидно, что одна десятая содержитъ десять сотыхъ, одна сотая—десять тысячныхъ, и вообще, одна единица какого либо десятичнаго порядка содержитъ въ себѣ десять единицъ порядка послѣдующаго.

Десятичнымъ числомъ называется такое число, которое показываетъ сколько какая нибудь величина содержитъ въ себѣ единицъ и десятичныхъ частей единицы. Такимъ образомъ десятичное число можетъ состоять изъ *части цѣлой* и *десятичной*, содержащей единицы различныхъ десятичныхъ порядковъ. Число единицъ каждаго порядка менѣе 10, ибо соединеніе десяти единицъ извѣстнаго порядка образуетъ единицу порядка предшествующаго.

Способъ писать десятичныя числа.

188. Распространяя сущность нашей десятичной системы, можно десятичное число изображать также какъ и цѣлыя числа. Дѣйствительно, необходимое основаніе для письменной нумераціи есть то, что всякая цифра, написанная направо отъ другой, представляетъ собою единицы въ десять разъ меньшія, чѣмъ та другая. Не останавливаясь на цѣлыхъ единицахъ, можно согласиться, что для изображенія десятичнаго числа, слѣдуетъ писать прежде цѣлую часть, а потомъ, точно также, направо за цифрою цѣлыхъ единицъ, цифру представляющую десятыя доли; потомъ, вправо отъ этой, цифру представляющую сотыя доли и т. д. При этомъ, для избѣжанія недоразумѣнія нужна единственная предосторожность, состоящая въ указаніи, какая изъ написанныхъ цифръ представляетъ цѣлыя единицы. Этого достигаютъ тѣмъ, что ставятъ *запятую* направо за цифрою цѣлыхъ единицъ.

Положимъ, напримѣръ, что десятичное число содержитъ 35 *единицъ*, 3 *десятыхъ*, 5 *тысячныхъ* и 7 *десятитысячныхъ*; тогда пишутъ

35,3057,

ставя нуль на мѣстѣ сотыхъ, ибо предложенное число ихъ не содержитъ.

Когда десятичное число не содержитъ цѣлой части, то пишутъ нуль, чтобы удержать ея мѣсто, и направо отъ нуля ставятъ запятую; за тѣмъ десятичную часть пишутъ по прежнему.

Такимъ образомъ число содержащее 3 *десятыхъ*, 5 *тысячныхъ* и 7 *десятитысячныхъ* пишутъ

0,3057.

Цифры составляющія десятичную часть десятичнаго числа называются *десятичными цыфрами* или *десятичными знаками*, или просто *десятичными*.

189. *Десятичное число величины своей не измѣнитъ, если приписать къ нему справа одинъ или нѣсколько нулей.*

Это потому, что порядокъ единицъ, представляемыхъ какою нибудь цифрою, зависитъ только отъ занимаемаго ею мѣста относительно запятой. Такимъ образомъ 3,5 и 3,500

какъ то такъ и другое выражаютъ собою 3 единицы сопровождаемыя 5 десятыми.

Можно также и цѣлое число разсматривать. какъ десятичное, имѣющее одну или нѣсколько десятичныхъ равныхъ нулю; такимъ образомъ 31 можно написать 31,0 или 31,000 и т. д.

190. *Всякое десятичное число умножится или раздѣлится на 10, 100, 1000, и т. д., если запятую перенести чрезъ 1, 2, 3, и т. д. порядка вправо или влѣво.*

Это потому, что единицы выраженныя каждою цифрою сдѣлаются въ 10,100,1000 и т. д. разъ большими или меньшими.

Примѣчаніе.—Можетъ встрѣтиться, что число, которое должно будетъ умножать или дѣлить на 10,100,1000 и т. д. не будетъ достаточно содержать цифръ въ своей цѣлой или десятичной части для того, чтобы можно было сдѣлать перенесеніе запятой. Тогда это затрудненіе уничтожается приписку нулей справа къ десятичной части и слѣва къ цѣлой части даннаго числа. Положимъ, напримѣръ, что желаютъ раздѣлить 0,35 на 100; вмѣсто 0,35 пишутъ 000,35. Тогда передвинувъ запятую влѣво на 2 порядка, получатъ 0,0035, что и будетъ частнымъ отъ дѣленія предложеннаго числа на 100. Теперь, положимъ другое, что нужно умножить 3,5 на 1000, пишутъ 3,5000 вмѣсто 3,5; потомъ представляютъ запятую на 3 порядка вправо, получаютъ 3500,0 или просто 3500, что и будетъ искомымъ произведеніемъ.

Способъ произносить написанныя десятичныя числа.

191. *Чтобы произнести написанное десятичное число, сначала произносятъ цѣлую часть, если таковая будетъ, а потомъ, часть, вправо отъ запятой, произносятъ какъ бы цѣлое число, упоминая порядокъ десятичныхъ единицъ выраженныхъ послѣднею цифрою.*

Напримѣръ, число 35,3057 произносятъ говоря:

тридцать пять цѣлыхъ, три тысячи пятьдесятъ семь десятитысячныхъ.

Придти къ такому правилу весьма естественно, разсмотрѣвъ, что число 35,3057, кромѣ 35 единицъ, содержитъ:

7 *десятитысячныхъ*,
5 *тысячныхъ* или 50 *десятитысячныхъ*,
3 *десятыхъ* или 3000 *десятитысячныхъ*;

т. е. 3057 *десятитысячныхъ*.

Примѣчаніе I.—Часто, когда десятичное число имѣетъ немного знаковъ, оно произносится какъ цѣлое, т. е. выпускаютъ запятую и только подъ конецъ указываютъ на порядокъ, выражаемый послѣднею десятичною. Напримѣръ, число 35,3057 произносятъ такимъ образомъ:

триста пятьдесятъ три тысячи, пятьдесятъ семь десятитысячныхъ.

Дѣйствительно, 35 единицъ находящихся въ числѣ содержатъ 350000 *десятитысячныхъ;* поэтому число состоитъ изъ 350000 *десятитысячныхъ* и 3057 *десятитысячныхъ*, т. е. 353057 *десятитысячныхъ*.

Примѣчаніе II. — Напротивъ, когда десятичное число состоитъ изъ большаго числа знаковъ, то необходимо слѣдуетъ раздѣлить его, начиная отъ запятой вправо, на десятичныя грани, каждая въ три цифры. Послѣдняя направо грань можетъ имѣть двѣ или даже одну цифру, но тогда приписываютъ къ ней въ дополненіе одинъ или два нуля. Сдѣлавъ это, произносятъ сначала цѣлую часть, потомъ послѣдовательно каждую грань, упоминая порядокъ единицъ представляемыхъ ихъ послѣдними цифрами.

Такъ число 3,1415926535897 произносится:

3 *единицы*, 141 *тысячныхъ*, 592 *милліонныхъ*, 653 *билліонныхъ*, 589 *трилліонныхъ*, 700 *квадраліонныхъ* (*).

Обращеніе десятичнаго числа въ обыкновенную дробь.

192. Возьмемъ число 35,3057, котораго послѣдняя цифра представляетъ собою *десятитысячныя*. Это число, будучи составлено (§ 191, Прим. I.) изъ 353057 десятитысячныхъ, равно дроби имѣющей въ числителѣ 353057, а въ знаменателѣ 10000; поэтому можно написать

$$35{,}3057 = \frac{353057}{10000}.$$

(*) Примѣняясь же къ нашему изустному счисленію, эта дробь должна выговариваться такъ: *3 единицы, 141 тысячныхъ, 592 милліонныхъ, 653 тысячамилліонныхъ, 589 билліонныхъ, 700 тысячабилліонныхъ*.

(Прим. перев.).

Вообще, *чтобы обратить десятичное число въ обыкновенную дробь, должно уничтожить запятую и результатъ раздѣлить на единицу сопровождаемую столькимъ числомъ нулей, сколько было въ данномъ числѣ десятичныхъ.*

Обратно, чтобы написать въ формѣ десятичнаго числа дробь, имѣющую знаменателемъ единицу сопровождаемую однимъ или нѣсколькими нулями, достаточно написать числителя и помощью запятой отдѣлить въ немъ отъ правой руки къ лѣвой столько десятичныхъ, сколько было нулей въ знаменателѣ.

Когда это число нулей превышаетъ число цифръ въ числителѣ дроби, то слѣва къ послѣднему приписываютъ одинъ или нѣсколько нулей, пока не получится возможность приложить предложенное правило. Положимъ, напримѣръ, что обращается дробь $\frac{35}{10000}$, то пишутъ 0,0035.

Примѣчаніе. — Десятичныя числа часто называютъ десятичными дробями. Изъ предъидущаго видно, что десятичную дробь можно опредѣлить, говоря: что это есть дробь имѣющая знаменателемъ какую нибудь степень 10-ти.

Сложеніе десятичныхъ чиселъ.

193. *Чтобы сдѣлать сложеніе нѣсколькихъ десятичныхъ чиселъ уравниваютъ въ нихъ число десятичныхъ, дополняя одно или нѣсколько изъ нихъ, если то будетъ необходимо, однимъ или нѣсколькими нулями. Потомъ пишутъ ихъ одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного и того же порядка находились въ одномъ вертикальномъ ряду, а далѣе поступаютъ какъ съ цѣлыми числами, помѣщая въ суммѣ запятую подъ запятыми данныхъ чиселъ.*

Положимъ, напримѣръ, что требуется сложить числа

314,1592, 986,96, 3,183.

Дѣйствіе располагаютъ такъ:

$$\begin{array}{r} 314{,}1592 \\ 986{,}9600 \\ 3{,}1830 \\ \hline 1304{,}3022. \end{array}$$

Искомая сумма будетъ 1304,3022.

Это правило основано на разсужденіи сходномъ съ тѣмъ, какое употреблялось при сложеніи цѣлыхъ чиселъ. Разсмотримъ теперь, что это правило, есть слѣдствіе того, ко-

торое нами было дано при сложеніи дробей. Дѣйствительно, числа, которыя должны быть сложены, будучи числами десятичными, могутъ быть замѣнены дробями, имѣющими для числителей тѣ же числа, съ уничтоженными только въ нихъ запятыми, а общимъ знаменателемъ единицу сопровождаемую столькими нулями, сколько было въ числѣ десятичныхъ знаковъ. Тогда, чтобы получить искомую сумму, должно сложить числителей и результату дать общаго знаменателя, или все тоже, что отдѣлить справа въ результатѣ столько десятичныхъ цифръ, сколько было въ данныхъ числахъ.

Примѣчаніе.—Въ практикѣ весьма часто допускается не пополнять десятичныхъ, и данныя числа просто писать одно подъ другимъ такъ, чтобы только совпадали запятыя. Дѣйствіе тогда располагаютъ такимъ образомъ:

314,1592
986,96
3,96
1304,3022.

Вычитаніе десятичныхъ чиселъ.

194. *Чтобы сдѣлать вычитаніе двухъ десятичныхъ чиселъ, уравниваютъ въ нихъ число десятичныхъ, дополняя какое нибудь, если это необходимо, однимъ или нѣсколькими нулями справа. Потомъ меньшее пишутъ подъ большимъ такъ, чтобы запятыя совпадали и потомъ дѣйствуютъ какъ съ цѣлыми числами, помѣщая запятую въ разности тамъ же, гдѣ она находилась въ данныхъ числахъ.*

Положимъ, напримѣръ, что требуется вычесть 314,1592 изъ 986,96. Дѣйствіе располагается такъ:

986,9600
314,1592
672,8008.

Искомая разность будетъ 672,8008.

Это правило основано на разсужденіи сходномъ съ тѣмъ, какое употреблялось при вычитаніи цѣлыхъ чиселъ. Оно также можетъ быть выведено изъ общаго правила, даннаго нами для вычитанія дробей.

Примѣчаніе. — Когда вычитаемое число имѣетъ десятичныхъ менѣе чѣмъ другое число, то въ немъ нѣтъ необхо-

димости недостающее число знаковъ дополнять нулями. Желаютъ, напримѣръ, вычесть 98,69 изъ 314,1592, дѣйствіе располагаютъ такъ:

314,1592
98,69
215,4692.

Умноженіе десятичныхъ чиселъ.

195. *Чтобы умножить два десятичныхъ числа, должно откинувъ запятыя перемножить полученныя цѣлыя числа, а потомъ справа въ полученномъ произведеніи отдѣлить столько десятичныхъ, сколько было во множимомъ и во множитель.*

Даны, напримѣръ, 3,141 и 9,86. Эти числа соотвѣтственно равны дробямъ $\frac{3141}{1000}$ и $\frac{986}{100}$, а потому по правилу умноженія дробей,

$$3,141 \times 9,86 = \frac{3141 \times 986}{1000 \times 100} = \frac{3141 \times 986}{100000}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, чтобы имѣть произведеніе чиселъ 3,141 и 9,86, должно умножить эти числа откинувъ запятыя, а потомъ раздѣлить полученное произведеніе на 100000, для чего должно отдѣлить въ немъ справа пять десятичныхъ цифръ, т. е. столько, сколько было въ данныхъ числахъ.

Дѣйствіе располагаютъ такъ:

3,141
9,86
18 846
251 28
2826 9
30,97026.

Примѣчаніе.—Предъидущее правило очевидно будетъ дѣйствительно и въ томъ случаѣ, когда одно изъ перемножаемыхъ чиселъ будетъ цѣлое.

Дѣленіе десятичныхъ чиселъ.

196. *Чтобы раздѣлить два десятичныхъ числа одно на другое, уравниваютъ въ нихъ число десятичныхъ знаковъ, приписывая одинъ или нѣсколько нулей, если то будетъ необходимо, къ одно-*

му изъ нихъ. Потомъ отбрасываютъ запятую и найденное частное для этихъ цѣлыхъ чиселъ будетъ искомымъ частнымъ.

Положимъ, напримѣръ, что желаютъ раздѣлить 31,41 на 9,869, или, уравнявъ десятичныя, 31,410 на 9,869. Вновь полученныя числа соотвѣтственно равны дробямъ $\frac{31410}{1000}$ и $\frac{9869}{1000}$, имѣющимъ 1000 общимъ знаменателемъ. Тогда по правилу дѣленія дробей

$$31,41 : 9,869 = \frac{31410}{1000} \times \frac{1000}{9869} = \frac{31410 \times 1000}{9869 \times 1000},$$

гдѣ, уничтожая общій множитель 1000 въ обоихъ членахъ послѣдней дроби, получимъ

$$31,41 : 9,869 = \frac{31410}{9869},$$

исключивъ изъ этой дроби цѣлое, получимъ

$$31,41 : 9,869 = 3 + \frac{1803}{9869}.$$

Примѣчаніе I.—Предъидущее правило должно оставаться безъ измѣненія и тогда, когда дѣлимое и дѣлитель будутъ цѣлыя числа, потому что мы можемъ цѣлое число разсматривать какъ десятичное, въ которомъ на мѣстѣ десятичныхъ нули. Положимъ, что желаютъ умножить 98 на 31,415, вмѣсто 98 пишемъ 98,000, тогда, поступая по предъидущему правилу, въ частномъ получимъ

$$\frac{98000}{31415} = 3 + \frac{3755}{31415}.$$

Примѣчаніе II.—Частное двухъ десятичныхъ чиселъ выражается, какъ мы видѣли, обыкновенно дробью. Оно можетъ выразиться и цѣлымъ числомъ, но вообще оно состоитъ изъ цѣлой части и изъ какой нибудь дроби меньшей единицы. Далѣе мы увидимъ, какимъ образомъ эта дополнительная дробь можетъ быть обращена въ десятичную.

Приближенное вычисленіе величинъ.

197. Вычислить величину съ точностію *до одной единицы* значитъ, найти наибольшее число единицъ заключающихся въ этой величинѣ. Это число и число непосредственно большее оба выражаютъ мѣру величины, съ точностію менѣе чѣмъ на одну единицу; но первое *съ недостаткомъ*, а вто-

рое *съ избыткомъ*. Напримѣръ, если какая нибудь длина болѣе 35 саженъ, но менѣе 36, и если сажень принять за единицу длины, то числа 35 и 36 будутъ опредѣлять длину, съ точностію до одной единицы, первое съ недостаткомъ, а второе съ избыткомъ.

Вообще, вычислить какую нибудь величину съ точностію до $\frac{1}{n}$, значитъ найти наибольшее число, показывающее сколько разъ n-ная часть единицы заключается въ этой величинѣ. Если, напримѣръ, какая нибудь величина болѣе чѣмъ m разъ n-ная часть единицы и меньше чѣмъ $m+1$ разъ таже n-ная часть, то дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ выразятъ мѣру величины съ точностію до $\frac{1}{n}$, первая съ недостаткомъ, а вторая съ избыткомъ.

Предъидущія опредѣленія должны также распространяться и на величины выраженныя въ числахъ.

198. *Чтобы вычислить дробь съ точностію до единицы, достаточно, получить цѣлое число заключающееся въ этой дроби, или цѣлое непосредственно высшее.*

Возьмемъ дробь $\frac{355}{113}$; исключивъ цѣлое въ ней содержащееся, найдемъ

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}.$$

Такимъ образомъ, дробь $\frac{355}{113}$ заключается между 3 и 4 цѣлыми, поэтому числа 3 и 4 суть величины дроби $\frac{355}{113}$ точныя до единицы, первая съ недостаткомъ, а вторая съ избыткомъ.

199. *Чтобы вычислить дробь съ точностію до* $\frac{1}{n}$, *достаточно, вычислить съ точностію до единицы произведеніе этой дроби на* n *и потомъ раздѣлить на* n *одно изъ двухъ послѣдовательно полученныхъ чиселъ.*

Дѣйствительно, положимъ, что желаютъ вычислить дробь $\frac{a}{b}$ съ точностію до $\frac{1}{n}$. Обозначимъ чрезъ x наибольшее число n-ныхъ заключающихся въ $\frac{a}{b}$ и опредѣлимъ это число x.

Возьмемъ прежде, что $\frac{x}{n} < \frac{a}{b}$ и умножимъ эти двѣ дроби на n, будетъ

$$x < \frac{a \times n}{b}.$$

Потомъ возьмемъ, что $\frac{x+1}{n} > \frac{a}{b}$ и умножимъ эти двѣ дроби на n, получимъ

$$x + 1 > \frac{a \times n}{b}.$$

Изъ этого видно, что дробь $\frac{a \times n}{b}$ заключается между двумя послѣдовательными цѣлыми числами x и $x+1$; а потому неизвѣстное число x получится исключивъ цѣлое число содержащееся въ дроби $\frac{a \times n}{b}$.

Примѣчаніе.—Если дробь $\frac{a}{b}$ можетъ быть *въ точности* выражена дробью имѣющею n знаменателемъ, то эту дробь отыскиваютъ по предъидущему способу. Въ самомъ дѣлѣ, x тогда выражаетъ точное число n-ыхъ заключающихся въ $\frac{a}{b}$, и будетъ $\frac{x}{n} = \frac{a}{b}$, умноживъ это на n получимъ

$$x = \frac{a \times n}{b}.$$

Такимъ образомъ дробь $\frac{a \times n}{b}$ приведется въ цѣлое число, которое будетъ величиною x.

Если дробь $\frac{a}{b}$ несократима, что всегда можно предположить, то случай, разсматриваемый нами не можетъ имѣть мѣста, если только n не будетъ кратнымъ b (§ 149).

200. *Примѣръ.* — Предложимъ себѣ вычислить дробь $\frac{355}{113}$ съ точностію до $\frac{1}{7}$. Произведеніе $\frac{355}{113} \times 7$ есть $\frac{2485}{113}$; цѣлое заключающееся въ этой дроби есть 21. Слѣдовательно величины дроби $\frac{355}{113}$, вычисленныя съ точностію до $\frac{1}{7}$, будутъ $\frac{21}{7}$ и $\frac{22}{7}$. Вторая изъ этихъ дробей $\frac{22}{7}$ мало разнится отъ $\frac{355}{113}$. Производя вычисленія найдемъ $\frac{22}{7} - \frac{355}{113} = \frac{1}{791}$, изъ

чего видно, что принимая $\frac{22}{7}$ вмѣсто $\frac{355}{113}$, ошибка будетъ только на $\frac{1}{791}$.

Условіе при которомъ обыкновенная дробь можетъ обратиться въ десятичную.

201. Мы видѣли, что дѣйствія надъ десятичными числами производятся по тому же способу, какъ и дѣйствія надъ цѣлыми числами, тогда какъ вычисленія обыкновенныхъ дробей далеко не такъ просты.

Поэтому въ практикѣ, вычисленія почти всегда производятся въ числахъ десятичныхъ и для этаго, если встрѣчаются обыкновенныя дроби, то ихъ обращаютъ въ десятичныя или точно, или приближенно.

Найдемъ предварительно условіе, при которомъ обыкновенная дробь можетъ обратиться въ точную десятичную, а потомъ предложимъ способъ для перевода такой дроби въ точную десятичную, если только она способна обратиться въ таковую, а въ противномъ случаѣ, съ даннымъ приближеніемъ.

202. Теорема.—*Для того чтобы обыкновенная несократимая дробь могла точно обратиться въ десятичную, необходимо и достаточно, чтобы ея знаменатель не содержалъ никакихъ другихъ первоначальныхъ множителей кромѣ 2 и 5.*

1°. *Это условіе необходимо.* Дѣйствительно, пусть $\frac{a}{b}$ будетъ несократимая дробь, которая подлежитъ обращенію въ дробь десятичную. Предполагая эту десятичную дробь написанною въ формѣ дроби обыкновенной, обозначимъ ея числителя чрезъ N, а знаменателя ея чрезъ 10 съ показателемъ степени m, т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{N}{10^m};$$

умножая какъ ту такъ и другую на 10^m, получимъ

$$\frac{a \times 10^m}{b} = N,$$

что показываетъ, что дробь $\frac{a \times 10^m}{b}$ будетъ числомъ цѣлымъ. Если b дѣлитъ произведеніе $a \times 10^m$, и такъ какъ b

съ a числа первыя, то b раздѣлитъ 10^m, слѣдовательно b содержитъ только множителей 2 и 5, ибо они единственные входящіе въ 10^m.

2°. *Это условіе достаточно.* Дѣйствительно, пусть $\frac{a}{b}$ несократимая дробь, которой знаменатель не содержитъ никакого другаго первоначальнаго множителя кромѣ 2 и 5. Такъ какъ $10=2\times5$, то очевидно, что дробь $\frac{a\times10^m}{b}$ обратится въ цѣлое число, если для m принять того изъ показателей при множителяхъ 2 и 5 находящихся въ b, который будетъ болѣе. Обозначивъ же это цѣлое чрезъ N имѣемъ

$$\frac{a\times10^m}{b}=N,$$

и раздѣливъ на 10^m,

$$\frac{a}{b}=\frac{N}{10^m}.$$

Такимъ образомъ, дробь $\frac{a}{b}$ равняется дроби имѣющей знаменателемъ степень десяти; другими словами она обратима въ десятичную дробь.

Слѣдствіе.—Когда обыкновенная несократимая дробь обратима въ десятичное число, то это десятичное число будетъ имѣть столько десятичныхъ цифръ, сколько будетъ единицъ въ большемъ изъ показателей при множителяхъ 2 и 5 находящихся въ знаменателѣ дроби.

Обращеніе обыкновенной дроби въ десятичную.

203. Мы уже видѣли, что обыкновенная дробь не всегда можетъ быть выражена съ точностію десятичнымъ числомъ, но во всякомъ случаѣ можетъ быть вычислена въ десятичныхъ доляхъ съ точностію до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, и т. д. по желанію.

Дѣйствительно, по правилу § 199, *для вычисленія дроби съ точностію до* $\frac{1}{10}$ *достаточно*: 1°. *Умножить числителя на* 10^n, *приписавъ къ нему справа* n *нулей*; 2°. *Найти цѣлое частное отъ дѣленія этого произведенія на знаменателя*; *и* 3°. *Раздѣлить это частное на* 10^n, *чего достигнемъ отдѣляя въ немъ справа* n *цифръ.*

Десятичное число, полученное такимъ образомъ, выразитъ величину дроби съ точностію до $\frac{1}{10^n}$ съ недостаткомъ. Точная же величина этой дроби получилась бы тогда, когда она, будучи несократимой, имѣла бы знаменателемъ дѣлителя для 10^n (§ 199, Примѣчаніе).

204. *Примѣръ.*—Положимъ, что желаемъ вычислить дробь $\frac{355}{113}$ съ точностію $\frac{1}{10^6}$ или до 0,000001.

Припишемъ къ числителю справа *шесть* нулей и результатъ раздѣлимъ на знаменателя.

$$
\begin{array}{r|l}
355000000 & 113 \\
339 & 3141592 \\
\hline
160 & \\
113 & \\
\hline
470 & \\
452 & \\
\hline
180 & \\
113 & \\
\hline
670 & \\
565 & \\
\hline
1050 & \\
1017 & \\
\hline
330 & \\
226 & \\
\hline
104. &
\end{array}
$$

Полученное частное есть 3141592; теперь остается только отдѣлить въ немъ справа 6 десятичныхъ цифръ, такимъ образомъ величина дроби

$$\frac{355}{113} = 3{,}141592$$

съ точностію до 0,000001 съ недостаткомъ. Увеличивъ послѣднюю десятичную цифру единицею, получимъ приближенную величину дроби точную до 0,000001 съ избыткомъ.

Нѣтъ необходимости приписывать справа къ числителю нули, но можно постепенно приписывать по нулю справа къ остатку, служащему для полученія слѣдующаго частнаго; тогда дѣйствіе расположится такъ:

$$\begin{array}{r|l} 355 & 113 \\ \hline 160 & 3,141592 \\ 470 & \\ 180 & \\ 670 & \\ 1050 & \\ 330 & \\ 104 & \end{array}$$

совершивъ дѣленіе 355 на 113, давшее въ частномъ 3, пишутъ запятую справа у этаго частнаго. Дѣйствительно, число цифръ, которыя остается найти въ частномъ, равно числу нулей, по предположенію написанныхъ справа у 355, т. е. 6; сдѣдовательно всѣ эти остальныя цифры должны быть десятичныя.

205. Изъ предъидущаго можемъ вывести слѣдующее правило:

Чтобы вычислить обыкновенную дробь въ десятичныхъ знакахъ, съ точностію до единицы извѣстнаго порядка, дѣлятъ числителя на знаменателя и ставятъ справа частнаго запятую; это частное можетъ быть выражено и нулемъ, если числитель будетъ менѣе знаменателя. Къ полученному остатку справа приприписываютъ нуль и результатъ дѣлятъ на знаменателя, полученное частное будетъ первою десятичною цифрою. Въ такомъ порядкѣ дѣйствіе продолжаютъ до тѣхъ поръ пока десятичныхъ получатъ столько, сколько ихъ будетъ требоваться.

206. Если предъидущее правило будетъ приложено къ дроби обращаемой съ точностію въ десятичную, то послѣ извѣстнаго числа отдѣльныхъ дѣленій получится въ остаткѣ нуль, тогда десятичными знаками выразится точная величина дроби.

Разсмотримъ, напримѣръ, дробь $\frac{11}{16}$, которая обратима въ точную десятичную дробь, ибо ея знаменатель есть степень двухъ.

$$\begin{array}{r|l} 110 & 16 \\ \hline 140 & 0,6875. \\ 120 & \\ 80 & \\ 0. & \end{array}$$

При четвертомъ дѣленіи получается въ остаткѣ нуль, а потому въ точности

$$\frac{11}{16} = 0{,}6875.$$

207. Если же наоборотъ, возьмемъ обыкновенную дробь не обратимую въ точную десятичную, то сколько бы мы ни дѣйствовали, руководствуясь правиломъ § 205, мы никогда не получимъ въ остаткѣ нуля. Тогда говорятъ, *что обыкновенная дробь будучи обращаема въ десятичную даетъ безконечное число десятичныхъ цифръ.*

Если въ этой десятичной безконечной дроби, послѣдовательно брать сначала одну, потомъ двѣ, три и т. д. десятичныхъ, то будемъ получать приближенныя величины обыкновенной дроби соотвѣтственно съ точностію до 0,1, до 0,01, до 0,001, и т. д. Ошибка, происходящая отъ принятія вмѣсто обыкновенной дроби послѣдовательно этихъ различныхъ величинъ, можетъ быть сдѣлана по желанію менѣе всякой дроби и тогда говорятъ, что данная дробь есть *предѣлъ* десятичной безконечной дроби, если ее брать съ бо́льшимъ и большимъ числомъ десятичныхъ знаковъ.

Вообще, когда послѣдовательныя величины какого нибудь перемѣннаго количества постоянно приближаются къ какому нибудь опредѣленному числу, тогда это число называется *предѣломъ* этого перемѣннаго количества.

Возьмемъ, напримѣръ, дробь $\frac{5}{7}$ и приложимъ къ ней правило § 205.

50	7
10	0,71428.....
30	
20	
60	
40	
⋮	

Приближенныя величины дроби $\frac{5}{7}$ съ точностію до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001, до 0,00001,..... соотвѣтственно будутъ

0,7, 0,71, 0,714, 0,7142, 0,71428,.....

и тогда

$\frac{5}{7}$ = предѣлу для 0,71428.....

Десятичныя періодическія дроби.

208. *Періодическою десятичною дробью* называется такая десятичная дробь, которая имѣетъ безконечное число десятичныхъ цифръ, изъ коихъ нѣкоторыя, начиная съ какого нибудь порядка, періодически повторяются въ одной и той же послѣдовательности.

Рядъ такимъ образомъ повторяющихся цифръ называется *періодомъ*.

Періодическая десятичная дробь называется *несмѣшанною періодическою*, если первый періодъ начинается тотчасъ послѣ запятой; въ противномъ случаѣ она называется *смѣшанною*, тогда цифры предшествующія первому періоду составляютъ *непериодическую часть*.

Такъ

$$0,\ 267267267.....$$

есть несмѣшенная періодическая десятичная дробь, а 267 ея періодъ.

Точно также,

$$0,\ 73267267267.....$$

есть смѣшанная періодическая дробь, имѣющая періодомъ 267, а непериодическою частью 73.

209. Теорема. *Если обыкновенная дробь, обращаясь въ десятичную даетъ безконечное число цифръ, то эта дробь есть періодическая.*

Возьмемъ дробь $\frac{5}{7}$. Для обращенія ея въ десятичную мы поступаемъ такъ:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 7 \\ 10 & \overline{0,71428571.....} \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ \vdots & \end{array}$$

Дѣлимъ 5 на 7, получаемъ въ частномъ 0 и въ остаткѣ 5. Этотъ нуль пишемъ въ частномъ, а за нимъ справа запя-

тую. Потомъ къ остатку 5 справа приписываемъ 0 и результатъ 50 дѣлимъ на 7; частное 7 будетъ первою десятичною цифрою. Къ остатку 1 справа приписываемъ нуль и результатъ 10 дѣлимъ на 7; частное 1 будетъ второю десятичною. Далѣе, продолжаютъ такъ дѣйствовать до безконечности. Но, такъ какъ при всѣхъ отдѣльныхъ дѣленіяхъ, дѣлителемъ постоянно 7, то получаемые остатки должны быть менѣе 7; равняться же нулю ни одинъ изъ нихъ не можетъ, ибо тогда дробь $\frac{5}{7}$ была бы обратима въ десятичную дробь съ ограниченнымъ числомъ цифръ. Поэтому, въ ходѣ дѣйствія мы не можемъ получить болѣе 6 различныхъ остатковъ, т. е. 1, 2, 3, 4, 5, 6. Изъ этого слѣдуетъ, что когда мы послѣ шести цифръ въ частномъ найдемъ еще цифру, то полученный при этомъ остатокъ будетъ одинъ изъ встрѣчавшихся. Стало быть тогда, мы будемъ въ тѣхъ же условіяхъ въ какихъ находились, когда подобный остатокъ былъ полученъ въ первый разъ; другими словами, намъ придется, начиная съ этого момента, производить прежній порядокъ дѣйствій; стало быть и остатки и цифры частнаго будутъ повторяться періодически.

Слѣдствіе. *Когда какая нибудь обыкновенная дробь приводится въ десятичную періодическую, то число цифръ періода, сложенное съ числомъ цифръ періодической части, даетъ число меньшее знаменателя обыкновенной дроби.*

Нахожденіе обыкновенной дроби отъ которой произошла данная десятичная періодическая дробь.

210. Докажемъ теперь, что всякая періодическая десятичная дробь имѣетъ предѣлъ, или, какъ говорятъ, *основною дробью* ообыкновенную дробь и, въ то же время дадимъ способъ находить для періодической дроби эту основную дробь.

Во первыхъ, возьмемъ несмѣшанную періодическую десятичную дробь, неимѣющую цѣлой части, напримѣръ,

$$0{,}267267267\ldots\ldots$$

и обозначимъ чрезъ x предѣлъ этой дроби.

Пусть a будетъ приближенная величина x, полученная чрезъ удержаніе ограниченнаго числа періодовъ, которыхъ для большей ясности пусть будетъ 3. Тогда получимъ, что

$$(1)\ldots\ldots a = 0{,}267267267.$$

Такъ какъ періодъ въ три цифры, то величину a должно умножить на 10^3 или 1000, чтобы имѣть право перенести запятую за первый періодъ; тогда

$$1000\ a = 267{,}267267.$$

Эта величина содержитъ въ своей десятичной части періодовъ менѣе чѣмъ величина a, и чтобы было одинаковое число періодовъ, достаточно къ величинѣ $1000\ a$ прибавить дробь $0{,}000000267$ или $\frac{267}{1000^3}$, тогда получимъ

$$(2).....1000\ a + \frac{267}{1000^3} = 267{,}267267267.$$

Положивъ это, вторыя части равенствъ (1) и (2) будутъ имѣть одну и ту же десятичную часть и, вычитая оба эти равенства одно изъ другаго почленно, получимъ

$$999\ a + \frac{267}{1000^3} = 267;$$

потомъ раздѣляя на 999, будетъ

$$a + \frac{267}{999 \times 1000^3} = \frac{267}{999};$$

и слѣдовательно

$$a = \frac{267}{999} - \frac{267}{999 \times 1000^3}.$$

Когда a означаетъ приближенную величину x, полученную принимая n періодовъ, тогда имѣемъ, что

$$a = \frac{267}{999} - \frac{257}{999 \times 10000_n}.$$

Если для n брать все большія и большія величины, то величина дроби $\frac{267}{999 \times 1000_n}$, становясь все менѣе и менѣе, можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины; и потому ее можно отбросить изъ этого слѣдуетъ, что количество a имѣетъ предѣломъ дробь $\frac{267}{999}$ а потому

$$x = \frac{267}{999}.$$

211. Изъ этого общаго разсужденія вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема I.—*Основная обыкновенная дробь для дроби несмѣшанной періодической десятичной, неимѣющей цѣлой части, имѣетъ числителемъ періодъ, а знаменателемъ цифру 9 написанную столько разъ, сколько будетъ цифръ въ періодѣ.*

Примѣчаніе.—Обыкновенная дробь составленная по предъидущей теоремѣ часто можетъ быть приводима къ простѣй-

шему виду. Весьма важно наблюдать, что такъ какъ знаменатель такой дроби состоитъ изъ цифръ 9, значитъ не содержитъ множителей 2 и 5, то онъ долженъ оставаться такимъ же и по приведеніи дроби въ простѣйшій видъ. Изъ этого выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема II. *Знаменатель въ дроби несократимой, основной для какой нибудь несмѣшанной періодической, не заключаетъ множителей ни 2 ни 5.*

212. Возьмемъ теперь дробь смѣшанную періодическую десятичную, неимѣющую цѣлой части напримѣръ,

$$0{,}34267267267.....$$

Обозначимъ чрезъ x предѣлъ. И пусть a будетъ приближенная величина x, полученная отъ принятія ограниченнаго числа періодовъ, которыхъ положимъ взято 3. Получимъ

$$a = 0{,}34267267267.$$

Величина a должна быть умножена на 10^2 или 100, чтобы запятую можно было перенести за періодическую часть, и будетъ

$$(1).....100\ a = 34{,}267267267.$$

Такъ какъ періодъ въ три цифры, то величину $100\ a$ нужно будетъ умножить на 10^3 или 1000, чтобы запятую перенесть за первый періодъ, поэтому получимъ

$$1000\times100\ a = 34267,\ 267267.$$

Величина $1000\times100\ a$ содержитъ въ своей десятичной части періодовъ однимъ менѣе чѣмъ величина $100\ a$, и очевидно, чтобы сравнять въ нихъ число періодовъ должно прибавить къ величинѣ $1000\times100\ a$ дробь $0{,}000000267$ или $\frac{267}{1000^3}$. Тогда будетъ

$$(2)..... 1000\times100\ a + \frac{267}{1000^3} = 34267{,}267267267.$$

Положивъ это, вторыя части равенствъ (1) и (2) имѣютъ одну и ту же десятичную часть, и, вычитая эти равенства одно изъ другаго почленно, получимъ

$$999\times100\ a + \frac{267}{1000^3} = 34267 - 34.$$

Раздѣливъ это на 999×100 или 99900, будетъ

$$a + \frac{267}{99900\times1000^3} = \frac{34267-34}{99900}$$

слѣдовательно

$$a = \frac{34267-34}{99900} - \frac{267}{99900\times1000^3}$$

Если чрезъ a обозначаемъ приближенную величину для x, получаемую отъ принятія n періодовъ, то получимъ

$$a = \frac{34267-34}{99900} - \frac{267}{99900\times 1000_n}.$$

Давая для n большее и большее значеніе, дробь $\frac{267}{99900\times 1000_n}$ по величинѣ будетъ все меньше и меньше, такъ что можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины; слѣдовательно количество a имѣетъ предѣломъ дробь $\frac{34267-34}{99900}$. Поэтому

$$x = \frac{34267-34}{99900}.$$

213. Изъ подобныхъ разсужденій выводится слѣдующая теорема.

Теорема III.—*Основная обыкновенная дробь для дроби смѣшанной періодической десятичной, неимѣющей цѣлой части, имѣетъ числителемъ непріодическую часть вмѣстѣ съ періодомъ, уменьшенную непріодической частью, и знаменателемъ цифру 9, написанную столько разъ сколько въ періодѣ было цифръ, сопровождаемую столькими нулями сколько было цифръ въ непріодической части.*

Примѣчаніе I.—Числитель обыкновенной дроби составленный по предъидущей теоремѣ не можетъ оканчиваться нулемъ. Дѣйствительно, коль скоро этому дать мѣсто, то значитъ послѣдняя цифра непріодической части одинакова съ послѣднею цифрою періода, а тогда періодъ долженъ будетъ начинаться однимъ порядкомъ раньше чѣмъ предполагалось. Напримѣръ, если періодъ 267, а послѣдняя цифра непріодической части будетъ 7, то періодъ долженъ быть не 267, а 726, что противно предположенію.

Примѣчаніе II. — Обыкновенная дробь составленная по предъидущей теоремѣ часто можетъ быть приводима къ простѣйшему виду. При этомъ весьма важно не упускать изъ виду слѣдующее: знаменатель этой дроби, будучи составленъ изъ цифры 9 сопровождаемой столькими нулями, сколько цифръ въ непріодической части, заключаетъ въ себѣ каждаго изъ множителей 2 и 5 столько разъ, сколько въ немъ нулей. Между тѣмъ числитель дроби, никогда неоканчивающійся нулемъ, можетъ содержать только одного изъ множителей 2 и 5. Поэтому, когда дробь приведена къ

простѣйшему виду и болѣе уже несократима, то ея знаменатель сохранитъ изъ множителей 2 и 5 однимъ меньше, съ показателемъ равнымъ числу нулей, которыми оканчивался. Изъ этаго выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема IV.—*Знаменатель несократимой дроби, основной для какой нибудь смѣшанной періодической десятичной дроби, необходимо долженъ содержать въ себѣ одного изъ первоначальныхъ множителей 2 и 5 съ показателемъ въ точности равнымъ числу цифръ части непериодической. Онъ также можетъ имѣть и другаго множителя съ тѣмъ же показателемъ или съ показателемъ меньшимъ.*

214. Мы разсматривали періодическія десятичныя дроби неимѣвшія цѣлой части. Въ случаѣ же, если таковая при нихъ будетъ, ее предварительно устраняютъ, а потомъ приписываютъ къ полученной основной обыкновенной дроби. Такимъ образомъ, основная дробь для

$$34{,}267267267\ldots\ldots$$

получится

$$34+\frac{267}{999}=\frac{34\times 999+267}{999},$$

но такъ какъ $999=1000-1$, то

$$\frac{34\times(1000-1)+267}{999}=\frac{34267-34}{999}.$$

Точно также основная обыкновенная дробь для

$$25{,}34267267267\ldots\ldots$$

будетъ

$$25+\frac{34267-34}{99900}=\frac{25\times 99900+34267-34}{99900};$$

но такъ какъ $99900=100000-100$, то

$$\frac{25\times(100000-100)+34267-34}{99900}=\frac{2534267-2534}{99900}.$$

Очевидно поэтому, что теорема II и IV приложимы и къ дробямъ періодическимъ десятичнымъ имѣющимъ цѣлую часть.

215. Теоремы II и IV приводятъ къ слѣдующему:

Теорема V.— *Когда знаменатель обыкновенной несократимой дроби не содержитъ множителей ни 2 ни 5, то эта дробь дастъ несмѣшанную періодическую десятичную дробь.*

Дѣйствительно, такая дробь не можетъ обратиться въ десятичную дробь, имѣющую ограниченное число цифръ (§

203); поэтому она даетъ дробь десятичную періодическую (§ 209). Наконецъ, по теоремѣ IV, она не можетъ быть періодической смѣшанной; слѣдовательно она должна дать періодическую несмѣшанную.

Теорема IV.—*Когда знаменатель обыкновенной несократимой дроби содержитъ одного изъ множителей 2 или 5, или обоихъ, вмѣстѣ съ прочими множителями; то такая дробь дастъ смѣшанную періодическую десятичную дробь, въ которой число непериодическихъ цифръ равно наибольшему изъ показателей при множителяхъ 2 или 5, находящихся въ знаменателѣ обыкновенной дроби.*

Дѣйствительно, эта дробь не можетъ быть обращена въ десятичную дробь съ ограниченнымъ числомъ цифръ (§ 203); стало быть она дастъ дробь десятичную періодическую (§ 209). Эта десятичная дробь, по теоремѣ III, не можетъ быть періодической несмѣшанной, слѣдовательно она будетъ періодическая смѣшанная. Наконецъ, по теоремѣ IV, число цифръ непериодической части будетъ равно наибольшему изъ показателей при 2 и 5, заключающихся въ знаменателѣ обыкновенной дроби.

216. *Когда періодическая десятичная дробь имѣетъ періодомъ 9, то ея предѣлъ получится, взявши цѣлую часть, сопровождаемую непериодическими цифрами, если таковыя будутъ, и увеличивши единицею послѣднюю цифру въ полученномъ результатѣ.*

Возьмемъ сначала дробь несмѣшанную періодическую

$$34{,}999\ldots\ldots$$

и обозначимъ чрезъ x ея предѣлъ. Имѣемъ (§ 211, Теорема I)

$$x = 34 + \frac{9}{9},$$

т. е.

$$x = 35.$$

Потомъ возьмемъ дробь періодическую смѣшанную

$$27{,}34999\ldots\ldots$$

и обозначимъ чрезъ x ея предѣлъ. Тогда можно написать, что

$$x = 27{,}34 + \text{предѣлъ для } 0.00999\ldots\ldots,$$

но предѣлъ для $0.00999\ldots\ldots$ есть $\frac{9}{900}$ или $\frac{1}{100}$ (§ 213, Теор. III); поэтому

$$x = 27{,}34 + 0{,}01 = 27{,}35.$$

Изъ этого заключаемъ, что коль скоро къ обыкновенной дроби приложено правило § 205, то полученная десятичная дробь, если она періодическая, никогда не можетъ имѣть періодомъ цифру 9.

Упражненія.

1) Найти условіе по которому несократимая дробь можетъ быть обращена въ дробь, имѣющую знаменателемъ степень какого нибудь даннаго числа p.

2) Доказать, что если обыкновенная несократимая дробь даетъ дробь десятичную несмѣшанную періодическую, то въ ней періодъ можетъ начаться прежде запятой только тогда, когда числитель обыкновенной дроби оканчивается нулемъ.

3) Доказать, что если знаменатель несократимой обыкновенной дроби есть число первое съ числами 2 и 5, и если эта дробь, обращаясь, даетъ десятичную періодическую, въ которой періодъ будетъ изъ четнаго числа $2n$ цифръ, то:

1°. n первыхъ цифръ сложенныхъ послѣдовательно съ n послѣднихъ будутъ давать суммы равныя 9;

2°. Остатки соотвѣтствующіе n первымъ цифрамъ, сложенные соотвѣтственно съ тѣми, которые получались при n послѣднихъ цифрахъ, всѣ даютъ суммы равныя знаменателю простой дроби.

4) Доказать, что если двѣ обыкновенныя несократимыя дроби съ одинаковыми знаменателями будутъ обращены въ десятичныя, то періоды этихъ двухъ десятичныхъ будутъ имѣть одинаковое число цифръ.

5) Доказать, что если $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b}$ суть двѣ несократимыя дроби, дающія двѣ періодическія несмѣшанныя, то періоды послѣднихъ будутъ имѣть $b-1$ цифръ, и что цифры будутъ одни и тѣ же, но порядокъ ихъ будетъ различный.

6) $\frac{a}{p}$ есть несократимая дробь, которая даетъ несмѣшанную періодическую десятичную, имѣющую періодъ въ $p-1$ цифръ. Раздѣляя p на 10, мы не можемъ получить инаго остатка кромѣ 1, 3, 7, 9; ибо иначе p будетъ содержать

одного изъ множителей 2 и 5. Поэтому имѣемъ $p=10q+1$, или $p=10q+3$, или $p=10q+7$, или $p=10q+9$. Положивъ это требуется доказать что:

1°. Если $p=10q+1$, то каждая изъ 10 цифръ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 заключается въ періодѣ десятичной дроби ровно q разъ.

2°. Если $p=10q+3$, то каждая изъ 10 цифръ заключается въ періодѣ ровно q разъ за исключеніемъ 3 и 6, повторяющихся $q+1$ разъ.

3°. Если $p=10q+7$, то каждая изъ цифръ 0, 3, 6, 9 заключается въ періодѣ ровно q разъ, а каждая изъ прочихъ цифръ 1, 2, 4, 5, 7, 8 заключается $q+1$ разъ.

4°. Если $p=10q+9$, то каждая изъ 10 цифръ заключается въ періодѣ ровно $q+1$ разъ, исключая 0 и 9 повторяющихся q разъ.

Для примѣра можетъ служить дробь $\frac{a}{p}$ дающая несмѣшанную періодическую десятичную дробь, имѣющую періодъ $p-1$ цифръ, принимая для a какое нибудь цѣлое число, а для p одно изъ первоначальныхъ чиселъ 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ.

НЕСОИЗМѢРИМЫЯ ЧИСЛА.

ГЛАВА I.

ТЕОРІЯ КВАДРАТНЫХЪ КОРНЕЙ.

Предварительныя понятія.—О квадратномъ корнѣ.—Составленіе квадратной степени суммы двухъ частей.—Замѣчанія на квадратную степень цѣлыхъ чиселъ.—Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлаго и дробнаго числа съ точностію до одной единицы.—Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлаго и дробнаго числа въ данномъ приближеніи.—Вычисленіе квадратнаго корня изъ цѣлаго и дробнаго числа въ десятичныхъ доляхъ.

Предварительныя понятія.

217. Если двѣ величины будутъ кратны какой нибудь третьей, то эта послѣдняя называется ихъ *общею мѣрою*.

Двѣ величины будутъ соизмѣримы или несоизмѣримы, смотря потому будутъ ли они имѣть общую мѣру или не будутъ.

Если какая нибудь величина имѣетъ общую мѣру съ единицею, то эта общая мѣра можетъ быть: или равна самой единицѣ, или какой нибудь ея части. Въ первомъ-случаѣ величина измѣрима числомъ цѣлымъ, во второмъ случаѣ числомъ дробнымъ (§ 139). Обратно, величина, измѣряемая числомъ цѣлымъ или числомъ дробнымъ, будетъ соизмѣрима съ единицею, потому что она составлена изъ единицъ, или изъ какихъ нибудь частей единицы.

Число, выражающее величину несоизмѣримую съ единицею, опредѣляютъ такъ: *это число болье чиселъ измѣряющихъ величины меньшія чѣмъ данная величина и менье чиселъ измѣряющихъ величины большія чѣмъ данная величина.*

218. Говорятъ, число *соизмѣримо* или *раціонально* тогда, когда величина, мѣру которой выражаетъ это число, будетъ соизмѣрима съ единицею; въ противномъ случаѣ число называютъ *несоизмѣримымъ* или *ирраціональнымъ*.

Очевидно, что соизмѣримыя числа суть числа цѣлыя и дробныя, до сихъ поръ исключительно нами разсматривавшіяся.

Предъидущее опредѣленіе несоизмѣримыхъ чиселъ позволяетъ вычислять въ дробяхъ и съ приближеніемъ, какого только пожелаютъ, какое нибудь несоизмѣримое число, если только величина имъ измѣряемая будетъ опредѣлена съ точностію.

Дѣйствительно, возьмемъ величину несоизмѣримую съ единицею. Вычислимъ эту величину съ точностію до $\frac{1}{n}$ (§ 197), и пусть найденныя нами приближенныя величины будутъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$. Число измѣряющее разсматриваемую нами величину, по опредѣленію, заключается между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, слѣдовательно принимая ту или другую изъ этихъ двухъ дробей, мы будемъ впадать въ ошибку меньшую чѣмъ на $\frac{1}{n}$.

О квадратномъ корнѣ.

219. Квадратный корень какого нибудь числа N есть то число, которое должно возвысить въ квадратъ, чтобы получить N. Такимъ образомъ, 25 будетъ квадратомъ 5; а корнемъ квадратнымъ 25 будетъ 5. Точно также, $\frac{4}{9}$ есть квадратъ $\frac{2}{3}$, квадратный корень изъ $\frac{4}{9}$ есть $\frac{2}{3}$.

Чтобы изобразить квадратный корень изъ какого нибудь числа, пишутъ сначала это число, а по лѣвую сторону его помѣщаютъ знакъ $\sqrt{\ }$ называемый *радикаломъ* или *корнемъ*.

Такимъ образомъ $\sqrt{25}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$ представляютъ послѣдовательно квадратныя корни изъ 25 и $\frac{4}{9}$.

220. Всякое число, которое есть квадратъ какого нибудь другаго числа называется *точнымъ квадратомъ*.

Мы уже видѣли (§ 178), что то цѣлое число, которое не будетъ квадратомъ другаго цѣлаго числа не можетъ быть и квадратомъ дроби; слѣдовательно оно не есть точный квадратъ. Точно также несократимая дробь, у которой два ея члена не точныя квадраты, не можетъ быть точнымъ квадратомъ (§ 179).

Такъ какъ мы знакомы до сихъ поръ только съ числами цѣлыми и дробными, то опредѣленіе § 219 имѣетъ вполнѣ ясный смыслъ только относительно чиселъ, которыя суть точныя квадраты. Квадратный же корень какого нибудь числа N, неточнаго квадрата, опредѣляютъ говоря: *что это есть несоизмѣримое число большее чиселъ, которыхъ квадраты менѣе числа* N *и меньшее чиселъ, которыхъ квадраты болѣе числа* N. Легко усмотрѣть, что $\sqrt{N}$ есть дѣйствительно число подходящее подъ общее опредѣленіе § 139 т. е. что $\sqrt{N}$ можетъ выразить мѣру какой нибудь величины. Разсмотримъ, напримѣръ, путь пробѣгаемый какою нибудь движущеюся точкою, начинающею свое движеніе отъ одной точки неограниченной прямой и движущейся по этой прямой всегда въ о ну и ту же сторону. Начинаясь съ нуля пройденный путь будетъ постоянно возрастать и квадратъ числа служившаго ему мѣрою вначалѣ, бывшій менѣе N, впослѣдствіи долженъ превысить N. Понятно, что въ извѣстный моментъ, пройденный путь будетъ болѣе всѣхъ разстояній, измѣрявшихся числами, квадраты которыхъ были мѣнѣе N и будетъ меньше всѣхъ разстояній, измѣряющихся числами, квадраты которыхъ болѣе N; въ этотъ то моментъ путь, пройденный движущимся тѣломъ, будетъ измѣряться $\sqrt{N}$ (§ 217).

221. Дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляютъ квадратный корень изъ какого нибудь числа называется *извлеченіемъ квадратнаго корня.*

Вопросъ, который предстоитъ намъ рѣшить, можетъ быть выраженъ такъ:

Пусть дано число N, *цѣлое или дробное, требуется извлечь изъ него квадратный корень точный, если* N *будетъ точнымъ квадратомъ, а въ противномъ случаѣ съ даннымъ приближеніемъ.*

Но, для этаго необходимо предварительно разсмотрѣть нѣкоторыя свойства квадратовъ.

Составленіе квадрата суммы двухъ частей.

222. Теорема.—*Квадратъ суммы двухъ частей равняется квадрату первой части, плюсъ удвоенное произведеніе первой части на вторую и плюсъ квадратъ второй части.*

Возьмемъ сумму $7+5$. Квадратъ ея $(7+5)^2$ будетъ равенъ произведенію двухъ равныхъ множителей $(7+5)$; основываясь на § 70, этотъ квадратъ мы получимъ, умноживъ $7+5$ сначала на 7, а потомъ на 5 и сложивъ эти два результата. Умножая такимъ образомъ $7+5$ на 7, получимъ $7\times7+5\times7$, или $7^2+7\times5$, умножая $7+5$ на 5 получимъ $7\times5+5\times5$, или $7\times5+5^2$; поэтому $(7+5)^2=7^2+7\times5+7\times5+5^2$, или

$$(7+5)^2=7^2+2\times7\times5+5^2.$$

Слѣдствіе I.—*Квадратъ числа, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, равенъ квадрату десятковъ, плюсъ удвоенное произведеніе десятковъ на единицы, плюсъ квадратъ единицъ.* (*).

Слѣдствіе II. *Разность квадратовъ двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ равна двойному меньшему числу увеличенному единицею.*

Пусть a и $a+1$ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ. По предъидущей теоремѣ имѣемъ

$$(a+1)^2=a^2+2a+1$$

и слѣдовательно

$$(a+1)^2-a^2=2a+1.$$

Замѣчанія на квадраты цѣлыхъ чиселъ.

223. Девять первыхъ чиселъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

имѣютъ квадратами

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Обзоръ этой таблицы приводитъ къ нѣсколькимъ полезнымъ замѣчаніямъ.

Замѣтимъ предварительно, что квадратъ цѣлаго, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, оканчивается тою же циф-

(*) Напр. $75^2=(70+5)^2=70^2+2\times70\times5+5^2$. (Прим. перев.).

рою какъ и квадратъ его единицъ. Это очевидное слѣдствіе правила умноженія или слѣдствія § 222.

1°. *Квадраты цѣлыхъ чиселъ, имѣющихъ на концѣ 1 или 9 оканчиваются* 1-ою;

2°. *Квадраты цѣлыхъ чиселъ, имѣющихъ на концѣ 2 или 8, оканчиваются* 4мя;

3°. *Квадраты цѣлыхъ чиселъ, имѣющихъ на концѣ 3 или 7, оканчиваются* 9-ю;

4°. *Квадраты цѣлыхъ чиселъ, имѣющихъ на концѣ 4 или 6, оканчиваются* 6-ю;

5°. *Квадраты цѣлыхъ чиселъ, имѣющихъ на концѣ 5, оканчиваются* 5-ю;

Можно еще прибавить, *что квадраты цѣлыхъ чиселъ, имѣющихъ на концѣ 5, оканчиваются* 25-ю. Дѣйствительно, возьмемъ число $135=130+5$; имѣемъ (§ 222).

$$135^2=130^2+2\times130\times5+5^2.$$

Первая часть 135^2 т. е. 130^2 имѣетъ на концѣ два нуля, во второй части будетъ тоже $2\times130\times5$, или 130×10; стало быть десятки и единицы квадрата 135 даютъ мѣсто единственно для 25, квадрата цифры единицъ. Поэтому квадратъ 135 оканчивается цифрами 2 и 5.

Замѣтимъ еще, что квадраты цѣлыхъ чиселъ оканчивающихся 1, 2, 3, и т. д. нулями оканчиваются 2, 4, 6, и т. д. нулями (§ 39).

224. Изъ всего предшествовавшаго заключаемъ:

1°. *Цѣлое число, оканчивающееся на какую нибудь изъ цифръ 2, 3, 7, не есть точный квадратъ.*

2°. *Цѣлое число, канчащееся на 5 и котораго цифра десятковъ превышаетъ 2, не есть точный квадратъ.*

3°. *Цѣлое число оканчивающееся или нулемъ или нечетнымъ числомъ нулей не можетъ быть точнымъ квадратомъ.*

Это послѣднее заключеніе есть результатъ теоремы § 131. Возьмемъ число 27000. Это число, оканчиваясь нечетнымъ числомъ нулей, заключаетъ въ себѣ по крайней мѣрѣ однаго изъ множителей 2 и 5 съ нечетнымъ показателемъ, поэтому оно не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

Вообще цѣлое число не можетъ быть точнымъ квадратомъ (§ 131), если оно дѣлится на нечетную степень первоначальнаго числа; оно также не можетъ быть степенью и слѣдующаго за нимъ высшаго числа.

Если, напримѣръ, мы увидимъ, что цѣлое число дѣлится на 3, не дѣлясь въ тоже время на 9, то можемъ быть увѣренными, что это цѣлое не есть точный квадратъ.

225. Квадраты степеней отъ 10

$$10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ldots,$$

будутъ соотвѣтственно

$$100,\ 10000,\ 1000000,\ 100000000,\ldots.$$

Изъ этаго видно, что квадратный корень числа меньшаго 100 имѣетъ только одну цифру цѣлыхъ и что число заключающееся между 100 и 1000 въ корнѣ своемъ имѣетъ двѣ цифры и т. д.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ цѣлыхъ и дробныхъ, съ точностію до одной единицы.

226. Пусть N будетъ цѣлое или дробное число; обозначимъ чрезъ a цѣлую часть $\sqrt{N}$. Корень этотъ будетъ заключаться между a и $a+1$, и N будетъ заключаться между a^2 и $(a+1)^2$; слѣдовательно a^2 будетъ наибольшимъ цѣлымъ квадратомъ, входящимъ въ число N. Если N число дробное, то его цѣлая часть приближенно равна a^2, и такъ какъ оно менѣе $(a+1)^2$; то видимъ что:

Квадратный корень дробнаго числа N, *съ точностію до одной единицы, равенъ квадратному корню, точному до одной единицы, изъ цѣлой части числа* N.

Примемъ, что N число цѣлое и покажемъ: какъ можно находить цѣлую часть $\sqrt{N}$, а въ частномъ случаѣ, когда N будетъ точнымъ квадратомъ, какъ находить точную величину $\sqrt{N}$.

227. Если N будетъ < 100, то $\sqrt{N}$ будетъ < 10 (§ 225). Затѣмъ предложенный вопросъ рѣшается простымъ обзоромъ таблицы квадратовъ первыхъ девяти чиселъ (§ 223).

Первый примѣръ.—Пусть $N=64$. Обращаясь къ таблицѣ квадратовъ, находимъ, что 64 есть квадратъ 8, стало быть получимъ въ точности, что $\sqrt{64}=8$.

Второй примѣръ. Пусть $N=47$. Число 47 неточный квадратъ и мы находимъ, что оно заключается между двумя послѣдовательными квадратами 36 и 49, корни, которыхъ 6 и

7. Эти два числа таковы, что они опредѣляютъ величину $\sqrt{N}$ съ точностію до одной единицы, одно съ недостаткомъ, а другое съ избыткомъ.

228. Правило, по которому поступаютъ при извлеченіи квадратнаго корня съ точностію до одной единицы, изъ цѣлаго числа, большаго 100, основано на слѣдующихъ двухъ теоремахъ:

Теорема I.—*Число десятковъ квадратнаго корня изъ цѣлаго числа* $N > 100$ *равно квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ числа* N.

Положимъ, что N′ будетъ число сотенъ въ N, и a число десятковъ въ $\sqrt{N}$. N заключается между $a\times10$ и $(a+1)\times10$; N заключается между квадратами $a\times10$ и $(a+1)\times10$, т. е. (§ 82), между $a^2\times100$ и $(a+1)^2\times100$. Поэтому число N′ сотенъ въ N приближенно равно a^2, но менѣе $(a+1)^2$; или, выражаясь иначе, a^2 есть наибольшій цѣлый квадратъ, заключающійся въ N′ и a есть корень этаго наибольшаго квадрата.

Теорема II.—*Если отнять отъ цѣлаго числа* N *квадратъ десятковъ его корня и число оставшихся десятковъ раздѣлить на удвоенное число десятковъ корня, то полученное частное, или будетъ равно, или будетъ превышать цифру единицъ корня.*

Положимъ, что a будетъ число десятковъ $\sqrt{N}$ и b цифра единицъ этаго корня. Цѣлая часть $\sqrt{N}$ есть $a\times10+b$, поэтому N приблизительно равно $(a\times10+b)^2$, т. е. приблизительно равно $a^2\times100+2a\times10\times b+b^2$. Если отнимемъ отъ N квадратъ десятковъ его корня т. е. $a^2\times100$, то остатокъ отъ $N-a^2\times100$, который мы назовемъ чрезъ K, будетъ приблизительно равенъ $2a\times10\times b+b^2$, гдѣ десятковъ по меньшей мѣрѣ будетъ $2a\times b$. Изъ этого слѣдуетъ, что если раздѣлимъ число десятковъ въ K на $2a$, то получимъ частное равное или превышающее b.

229. Послѣ этаго, пусть требуется извлечь квадратный корень, съ точностію до одной единицы, изъ числа 589624.

Предложенное число болѣе 100, значитъ квадратный его корень превышаетъ 10 и, по теоремѣ I, число десятковъ этого корня равно корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ 5896 десяткахъ числа 589624. Поэтому, предварительно, должно найти цѣлую часть $\sqrt{5896}$.

Число 5896 само, будучи болѣе 100, будетъ имѣть квадратный корень большій 10 и, по теоремѣ I, число десятковъ этаго корня, равно корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата заключающагося въ 58 десяткахъ числа 5896. А поэтому, предварительно, должно найти цѣлую часть $\sqrt{58}$.

Число 58 менѣе 100, и квадратный его корень будетъ имѣть только одну цифру. Оказывается (§ 223), что 58 заключается между 49 и 64, которымъ соотвѣтствуютъ корни 7 и 8. Такимъ образомъ цѣлая часть $\sqrt{58}$ есть 7.

И такъ квадратный корень изъ 5896 имѣетъ 7 десятковъ; будемъ теперь отыскивать его единицы. Избытокъ числа 58 противъ 49, квадрата отъ 7, есть 9 и очевидно, что когда мы вычтемъ изъ 5896 квадратъ 7 десятковъ, т. е. 49 сотенъ, то остатокъ будетъ состоять изъ 9 сотенъ и 96 единицъ, что составитъ 996. Но, по теоремѣ II, если раздѣлить число 99 десятковъ остатка на удвоенное число десятковъ корня 14, то полученное частное или будетъ равно, или будетъ больше цифры единицъ корня; поэтому цѣлая часть $\sqrt{5896}$ или будетъ равна, или будетъ менѣе 77. Чтобы убѣдиться, что цифра единицъ корня есть дѣйствительно 7, должно смотрѣть можетъ ли быть вычтенъ квадратъ 77 изъ 5896: Но квадратъ 77 или $70+7$ равенъ $70^2+2\times70\times7+7^2$, или $4900+140\times7+7^2$, и вычтя изъ 5896 первую изъ этихъ трехъ частей, т. е. 4900, мы получимъ въ остаткѣ 996. Затѣмъ, изъ этаго остатка остается еще вычесть $140\times7+7^2$, или $(140+7)\,7$, или 147×7. Произведеніе 147×7 есть 1029, число превышающее 996; слѣдовательно, цифра единицъ $\sqrt{5896}$ менѣе 7. Если такъ, то должно пробовать цифру 6, располагая дѣйствія по предъидущему, и смотрѣть, можетъ ли быть вычтено произведеніе 146×6 изъ 996. Произведеніе 146×6 есть 876, число меньшее числа 996, значитъ цифра единицъ $\sqrt{5896}$ будетъ 6, а цѣлая часть корня будетъ 76. Избытокъ числа 5896 надъ квадратомъ отъ 76 есть очевидно избытокъ 996 противу 146×6, т. е. 120.

Вернемся теперь къ предложенному нами числу 589624. Корень его состоитъ изъ 76 десятковъ, теперь остается найти цифру его единицъ. Такъ какъ избытокъ числа 5896 противу 76^2 есть 120, избытокъ числа 589624 противу 760^2

или 76^2 сотенъ очевидно будетъ состоять изъ 120 сотенъ и 24 единицъ; поэтому избытокъ будетъ 12024. По теоремѣ II, если мы раздѣлимъ число 1202 десятковъ числа 12024 на удвоенное число 76 десятковъ корня т. е. на 152, то полученное частное 7 будетъ равно или болѣе цифры единицъ корня; цѣлая же часть $\sqrt{589624}$ равна или менѣе 767. Чтобы убѣдиться, дѣйствительно ли 7 будетъ цифрою единицъ корня, должно посмотрѣть, можетъ ли быть вычтенъ квадратъ 767 изъ 589624. Такъ какъ квадратъ 767 или $760+7$ равенъ $760^2+2\times760\times7+7^2$, то вычтя изъ 589624 первую изъ этихъ трехъ частей, т. е. 760^2, мы получимъ въ остаткѣ 12024, тогда останется изслѣдовать, можетъ ли быть изъ остатка вычтено $2\times760\times7+7^2$, или $1520\times7+7^2$, или $(1520+7)\times7$, илинаконецъ 1527×7. Произведеніе $1527\times7=10689$, а это число меньше нежели 12024; стало быть цѣлая часть $\sqrt{589624}$ равна 767. При чемъ избытокъ 589624 надъ квадратомъ отъ 767 равенъ избытку 12024 надъ 1527, что составляетъ 1335.

230. Изъ всего предъидущаго вытекаетъ слѣдующее правило:

Чтобы извлечь квадратный корень, съ точностію до одной единицы, изъ цѣлаго числа, это число раздѣляютъ отъ правой руки къ лѣвой на грани, въ каждой по двѣ цифры. Число граней, изъ которыхъ первая слѣва можетъ имѣть и одну цифру, равно будетъ числу цифръ корня.

Изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ и образуемаго первою гранью слѣва, извлекаютъ корень, онъ будетъ первою цифрою искомаго корня.

Квадратъ этой цифры вычитаютъ изъ числа образуемаго первою гранью слѣва, такимъ образомъ получится первый остатокъ къ правой сторонѣ котораго сносятъ слѣдующую грань.

Въ образовавшемся отъ этого числѣ отдѣляютъ послѣднюю правую цифру, и оставшуюся на лѣво часть дѣлятъ на удвоенную первую цифру корня. Цѣлое частное отъ этаго дѣленія будетъ равно или будетъ превышать вторую цифру корня. Чтобы убѣдиться въ этой цифрѣ, ее приписываютъ справа къ удвоенной первой цифрѣ корня и на нее же умножаютъ полученное число. Произведеніе вычитаютъ изъ числа образовавшагося изъ перваго остатка и второй грани, если вычитаніе можетъ быть произ-

ведено, то испытуемая цифра есть дѣйствительная. Если же вычитаніе невозможно, то поступая по прежнему, пробуютъ другую цифру, меньшую противъ прежней на единицу и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получится цифра настоящая.

Когда вторая цифра корня будетъ найдена, сносятъ третью грань и приписываютъ справа къ второму остатку. Въ образовавшемся числѣ отдѣляютъ послѣднюю цифру и оставшуюся влѣво часть дѣлятъ на удвоенное число состоящее изъ двухъ полученныхъ цифръ корня. Цѣлое частное отъ этаго дѣленія будетъ или равно, или болѣе третьей цифры корня. Чтобы убѣдиться въ этой цифрѣ, ее приписываютъ справа удвоеннаго числа первыхъ двухъ цифръ корня и на нее же умножаютъ образовавшееся число. Произведеніе вычитаютъ изъ числа, составленнаго изъ втораго остатка и третьей грани и, если вычитаніе будетъ возможно, то взятая цифра есть настоящая, если же на оборотъ, то, по прежнему способу, пробуютъ цифру меньшую прежней на единицу, и поступаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока не отыщется цифра настоящая. (*).

Въ такомъ же порядкѣ продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока всѣ грани будутъ снесены. Послѣдній полученный остатокъ называется остаткомъ дѣйствія. Если этотъ остатокъ будетъ нуль, то полученный корень изъ предложеннаго числа будетъ точный, въ противномъ случаѣ, получится единственно только цѣлая часть корня.

Примѣчаніе I.—Можетъ случиться при какомъ нибудь изъ дѣленій, производившихся для отысканія различныхъ цифръ корня, начиная со второй, что цѣлое частное будетъ превышать 9, тогда пробуютъ цифру все таки не выше 9.

Примѣчаніе II.—Можетъ также случиться при какомъ нибудь изъ дѣленій, что цѣлое частное будетъ нуль, въ этомъ случаѣ и искомая цифра будетъ тоже нуль. Тогда остаткомъ, соотвѣтствующимъ этой цифрѣ, будетъ послѣдній полученный остатокъ, соединенный съ послѣднею снесенною гранью. Затѣмъ сносятъ новую грань и продолжаютъ дѣйствовать по прежнему правилу.

231. Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ для примѣра число 589624 уже употреблявшееся нами для вывода правила.

---

*) Смотри 12-е упражненіе въ концѣ главы.

589624	767		
49	146	1527	
996			
876			
12024			
10689			
1335			

Данное число пишутъ налѣво, корень направо. Подъ корнемъ пишутъ: 1) 14, удвоеніе первой цифры корня, сопровождаемое второю цифрою 6, 2) Удвоеніе 152, или 146+6, числа образовавшагося изъ двухъ первыхъ цифръ корня, сопровождаемое третьею цифрою 7.

Подъ первою лѣвой гранью даннаго числа подписываютъ квадратъ первой цифры корня 49, далѣе подъ нимъ пишутъ число 996, полученное отъ вычитанія 49 изъ 58 и отъ снесенія къ правой сторонѣ остатка 9 второй грани 96. Подъ числомъ 996 пишутъ произведеніе чиселъ 146 на 6 т. е. 876, потомъ подъ нимъ число 12024, полученное отъ вычитанія 876 изъ 996 и отъ снесенія къ правой сторонѣ остатка 120 третьей грани 24. Подъ числомъ 12024 подписываютъ 10689 произведеніе чиселъ 1527 на 7; затѣмъ, избытокъ 1335, числа 12024 надъ числомъ 10689 будетъ остаткомъ дѣйствія.

Дѣйствіе можетъ быть сокращено тѣмъ, что квадратъ первой цифры корня 49 не пишутъ, а пишутъ только избытокъ 58 надъ этимъ квадратомъ. Точно также не пишутъ произведеній 146×6 и 1527×7, но только одни остатки отъ вычитанія ихъ соотвѣтственно изъ чиселъ 996 и 12024; далѣе дѣйствіе располагаютъ, какъ было бы указано въ § 52. Порядокъ вычисленія будетъ тогда такой:

589624	767		
996	146	1527	
12024			
1335			

Что же касается до необходимыхъ пробъ при опредѣленіи различныхъ цифръ, начиная со второй, то обыкновенно всего не записываютъ, а поступаютъ какъ было показано въ § 53.

232. *Остатокъ, получаемый по извлеченіи квадратнаго корня, съ точностію до одной единицы, изъ цѣлаго числа, всегда менѣе удвоеннаго корня увеличеннаго единицею.*

Пусть N будетъ число подлежащее извлеченію, a корень и R остатокъ; тогда имѣемъ

$$N = a^2 + R.$$

Предположимъ, если возможно, что

$$R = \text{или} > 2a + 1;$$

прибавя по a^2 къ той и другой части, получимъ

$$a^2 + R \text{ или } N = \text{или} > a^2 + 2a + 1,$$

$$N = \text{или} > (a+1)^2;$$

но это невозможно по предположенію, потому что a^2 есть наибольшій цѣлый квадратъ заключающійся въ N.

Примѣчаніе.—Изъ этаго слѣдуетъ, что при извлеченіи квадратнаго корня изъ цѣлаго числа, каждый изъ образующихся остатковъ болѣе чѣмъ равенъ удвоенному числу, составленному изъ полученныхъ до него цифръ корня.

233. *Если остатокъ* R, *къ которому приводитъ извлеченіе квадратнаго корня изъ числа* N, *будетъ равенъ или менѣе числа* a *написаннаго въ корнѣ, то* a *есть величина* $\sqrt{N}$ *приближенная, точная до половины единицы, съ недостаткомъ. Если же наоборотъ,* R *превышаетъ* a, *тогда* a+1 *есть приближенная величина* $\sqrt{N}$, *точная до половины единицы, съ избыткомъ.*

Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$N = a^2 + R, \ldots\ldots (1)$$

кромѣ того

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + a + \frac{1}{4} \ldots\ldots (2)$$

Тогда, если R будетъ равенъ или менѣе a, то изъ этихъ равенствъ видно, что N будетъ менѣе чѣмъ $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$; слѣдовательно

$$\sqrt{N} \leqslant a + \frac{1}{2}.$$

Такимъ образомъ, $\sqrt{N}$ будетъ заключаться между a и $a + \frac{1}{2}$, т. е. между $\frac{2a}{2}$ и $\frac{2a+1}{2}$, отсюда очевидно, что $\frac{2a}{2}$ или a есть приближенная величина $\sqrt{N}$, точная до половины единицы, съ недостаткомъ.

Предположимъ теперь второе, что $R > a$; тогда R, какъ число цѣлое, будетъ по меньшей мѣрѣ равно $a+1$ и оче-

видно, по равенствамъ (1) и (2), что N будетъ превышать $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$; а потому

$$\sqrt{N} > a+\frac{1}{2}.$$

Такъ какъ величина $\sqrt{N}$ заключается между $a+\frac{1}{2}$ и $a+1$, т. е. между $\frac{2a+1}{2}$ и $\frac{2a+2}{2}$, то очевидно, что $\frac{2a+2}{2}$ или $a+1$ будетъ приближенная величина $\sqrt{N}$, съ точностію до половины единицы, съ избыткомъ.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ числа цѣлаго или дробнаго въ данномъ приближеніи.

234. Пусть N будетъ число цѣлое или дробное, и намъ требуется изъ него извлечь квадратный корень съ точностію до $\frac{1}{n}$. Основываясь на (§ 197), намъ слѣдуетъ найти такое цѣлое x, чтобы

$$\frac{x}{n} < \sqrt{N} \text{ и } \frac{x+1}{n} > \sqrt{N},$$

или возвышая въ квадратъ,

$$\frac{x^2}{n^2} < N \text{ и } \frac{(x+1)^2}{n^2} > N,$$

или наконецъ умножая на n^2,

$$x^2 < Nn^2 \text{ и } (x+1)^2 > Nn^2.$$

Эти послѣднія неравенства показываютъ, что x^2 есть наибольшій цѣлый квадратъ, заключающійся въ Nn^2, а слѣдовательно, искомое число x есть цѣлая часть $\sqrt{Nn^2}$.

Предъидущія разсужденія приводятъ къ слѣдующему правилу:

Чтобы извлечь квадратный корень изъ числа N, *цѣлаго или дробнаго, съ точностію до* $\frac{1}{n}$, *должно извлечь квадратный корень изъ произведенія* Nn^2 *съ точностію до одной единицы и результатъ раздѣлить на* n.

Первый примѣръ.—Требуется найдти $\sqrt{19}$ съ точностію до $\frac{1}{7}$. Квадратный корень изъ произведенія $19\times7^2=931$, съ точностію до одной единицы, будетъ 30 или 31. А потому $\frac{30}{7}$

и $\frac{31}{7}$ суть приближенныя величины $\sqrt{19}$, съ точностію до $\frac{1}{7}$, первая съ недостаткомъ, а вторая съ избыткомъ.

Второй примѣръ.—Требуется вычислить $\sqrt{\frac{355}{113}}$ съ точностію до $\frac{1}{7}$. Прежде должно вычислить квадратный корень, съ точностію до одной единицы, изъ $\frac{355}{113} \times 7^2 = \frac{17395}{113} = 153 + \frac{106}{113}$, т. е. (§ 226) квадратный корень, съ точностію до одной единицы, изъ цѣлой части 153. Величина $\sqrt{153}$, съ точностію до одной единицы, будетъ или 12 или 13, а потому $\frac{12}{7}$ и $\frac{13}{7}$ суть приближенныя величины $\sqrt{\frac{355}{113}}$ съ точностію до $\frac{1}{7}$, первая съ недостаткомъ, а вторая съ избыткомъ.

235. *Когда знаменатель какой нибудь дроби есть точный квадратъ* b^2, *то квадратный корень изъ такой дроби, съ точностію до* $\frac{1}{b}$, *получится, извлекая съ точностію до одной единицы, квадратный корень изъ числителя и раздѣливъ результатъ на* b.

Дѣйствительно, пусть изъ дроби $\frac{a}{b^2}$ требуется извлечь квадратный корень съ точностію до $\frac{1}{b}$. Основываясь на правилѣ § 234, должно извлечь, съ точностію до одной единицы, квадратный корень изъ произведенія $\frac{a}{b^2} \times b^2 = a$ и результатъ раздѣлить на b.

Примѣчаніе I.—Изъ этаго заключаемъ, что если два члена какой нибудь дроби суть точные квадраты, то точный квадратный корень данной дроби получится, извлекая квадратные корни изъ обоихъ членовъ дроби. Тоже вытекаетъ и изъ правила возвышенія дроби въ квадратъ (§ 177).

Примѣчаніе II.—Можно всегда сдѣлать знаменателя какой нибудь дроби точнымъ квадратомъ. Для этаго слѣдуетъ умножить оба члена этой дроби на знаменателя, тогда $\frac{a}{b}$ будеуъ равно $\frac{ab}{b^2}$, а въ послѣдней дроби знаменатель точный квадратъ.

Также, знаменателя какой нибудь дроби дѣлаютъ точнымъ квадратомъ, умножая оба ея члена на первоначальныхъ множителей, входящихъ въ нечетныхъ степеняхъ въ составъ знаменателя. Прилагая это правило къ несократимой дроби, получается *наименьшій квадратъ знаменателя*. Возьмемъ, напримѣръ, дробь $\frac{157}{240}$, знаменатель которой равенъ $2^4 \times 3 \times 5$; умножаемъ оба ея члена на 15, получится $\frac{2355}{3600}$, дробь у которой знаменатель есть точный квадратъ.

Вычисленіе въ десятичныхъ знакахъ квадратнаго корня изъ цѣлаго или дробнаго числа.

236. Предварительно возьмемъ цѣлое число N и предположимъ, что требуется вычислить $\sqrt{N}$ съ точностію до $\frac{1}{10^n}$. По § 234 должно: 1) умножить N на квадратъ отъ 10^n т. е. на 10^{2n}, 2) извлечь квадратный корень изъ этаго произведенія съ точностію до одной единицы, 3) результатъ раздѣлить на 10. Это правило очевидно можетъ быть изложено такъ:

Чтобы извлечь съ точностію до $\frac{1}{10^n}$ *квадратный корень изъ цѣлаго числа* N, *приписываютъ* 2n *нулей съ правой стороны* N, *изъ образовавшагося числа извлекаютъ квадратный корень съ точностію до одной единицы и въ результатѣ отдѣляютъ отъ правой руки къ лѣвой* n *десятичныхъ знаковъ.*

Примѣръ.—Требуется вычислить $\sqrt{2}$ съ точностію до $\frac{1}{10^4}$ или до 0,0001.

Величина $\sqrt{200000000}$, съ точностію до одной единицы, есть 14142 или 14143.

200000000	14142				
100	24	281	2824	28282	
400					
11900					
70400					
13836.					

Слѣдовательно, 1,4142 и 1,4143 суть величины квадратнаго корня изъ 2, съ точностію до 0,0001, первая съ недостаткомъ, а вторая съ избыткомъ.

237. Возьмемъ теперь дробное число N и предположимъ, что требуется извлечь $\sqrt{N}$ съ точностію до $\frac{1}{10^n}$. По §§ 226 и 234 должно: 1) умножить N на 10^{2n}, 2) отдѣлить цѣлыя заключающіяся въ результатѣ, 3) изъ этого цѣлаго извлечь квадратный корень съ точностію до одной единицы и 4) результатъ раздѣлить на 10^n.

Это правило можетъ быть выражено такъ:

Чтобы извлечь квадратный корень съ точностію до $\frac{1}{10^n}$ *изъ дробнаго числа, вычисляютъ это число съ точностію до* $\frac{1}{10^{2n}}$, *опускаютъ запятую, извлекаютъ изъ полученнаго цѣлаго числа квадратный корень съ точностію до одной единицы и потомъ въ результатѣ отдѣляютъ* n *десятичныхъ знаковъ, отъ правой руки къ лѣвой.*

Первый примѣръ.—Требуется вычислить $\sqrt{\frac{5}{7}}$ съ точностію до $\frac{1}{10^3}$ или до 0,001. Величина $\frac{5}{7}$ въ десятичныхъ знакахъ съ точностію до $\frac{1}{10^6}$ есть 0,714285. Величина $\sqrt{714285}$, съ точностію до одной единицы, будетъ или 845 или 846, а потому 0,845 или 0,846 будутъ величины $\sqrt{\frac{5}{7}}$ съ точностію до 0,001, первая съ недостаткомъ, а вторая съ избыткомъ.

Второй примѣръ.—Требуется вычислить $\sqrt{3,141}$ съ точностію до 0,001. Основываясь на правилѣ, должно 3,141 имѣть въ шести десятичныхъ знакахъ, что достигается приписко̀ю, съ правой стороны этаго числа, трехъ нулей. Затѣмъ, опуская запятую, получимъ 3141000. Опредѣлимъ величину $\sqrt{3141000}$ съ точностію до одной единицы, она будетъ или 1772 или 1773, а потому величина $\sqrt{3,141}$ съ точностію до 0,001 будетъ равна или 1,772 или 1,773.

Упражненія.

1. Доказать: почему цѣлое число не можетъ быть точнымъ квадратомъ, если цифрою его единицъ будетъ 6, цифра же десятковъ чётная; или, если цифрою единицъ будетъ или 1, или 4, или 9, а цифра его десятковъ будетъ нечётная?

2. Если написать одни за другими цифры десятковъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ квадратовъ, оканчивающихся одною и тою же цифрою (1, 4, 6 или 9), то полученный рядъ будетъ періодическій, періодъ будетъ состоять изъ 10 цифръ и, сверхъ того, двѣ цифры, стоящія на равныхъ разстояніяхъ отъ крайнихъ въ періодѣ, будутъ равны.

3. Доказать, почему квадратъ нечетнаго числа есть кратное для 8 увеличенныхъ единицею?

4. Доказать: почему, когда какое нибудь нечетное число равно суммѣ двухъ квадратовъ, то оно есть кратное для 4 увеличенныхъ единицею?

5. Доказать: почему число, если оно есть сумма двухъ квадратовъ, то будетъ кратнымъ для 8 увеличенныхъ на 2 или на 4?

6. Доказать, почему сумма n первыхъ нечетныхъ чиселъ равна n^2.

7. Квадратъ разности двухъ чиселъ равенъ суммѣ квадратовъ тѣхъ же чиселъ, уменьшенной удвоеннымъ произведеніемъ тѣхъ же чиселъ.

8. Если два или нѣсколько чиселъ состоятъ каждое изъ суммы двухъ квадратовъ, то и произведеніе ихъ будетъ суммою двухъ квадратовъ.

9. Если нечетное число есть сумма двухъ квадратовъ, то половина его есть также сумма двухъ квадратовъ.

10. Если цѣлое число дѣлится на 5, и есть сумма двухъ квадратовъ, то пятая часть этого числа есть также сумма квадратовъ.

11. Если квадратъ равенъ суммѣ другихъ квадратовъ ($25=16+9$), то одинъ изъ трехъ квадратовъ дѣлимъ на 5.

12. Когда опредѣлятъ одну или нѣсколько цифръ квадратнаго корня изъ числа цѣлаго и требуется опредѣлить слѣдующую цифру, то совершаютъ дѣленіе, частное котораго будетъ или искомою цифрою или цифрою высшею. Требуется доказать, что если число, составленное изъ цифръ уже написанныхъ въ корнѣ, будетъ равно или болѣе чѣмъ 5, то частное, о которомъ говорится, если оно будетъ болѣе искомой цифры, не можетъ превышать ее болѣе чѣмъ на одну единицу.

ГЛАВА II.

ТЕОРІЯ КУБИЧНЫХЪ КОРНЕЙ.

О кубичномъ корнѣ.—Составленіе куба суммы двухъ частей.—Примѣчанія на кубы цѣлыхъ чиселъ.—Вычисленіе кубичнаго корня съ точностію до одной единицы изъ числа цѣлаго и дробнаго.—Извлеченіе въ данномъ приближеніи кубичнаго корня изъ числа цѣлаго и дробнаго.—Извлеченіе въ десятичныхъ дробяхъ кубическаго корня изъ числа цѣлаго и дробнаго.

О кубичномъ корнѣ.

238. Кубичный корень изъ какого нибудь числа N, есть число, которое должно возвести въ кубъ, чтобы получить число N.

Такимъ образомъ, 125 есть кубъ для 5; кубичный корень изъ 125 будетъ 5. Точно также $\frac{8}{27}$ есть кубъ для $\frac{2}{3}$, кубичный корень изъ $\frac{8}{27}$ есть $\frac{2}{3}$.

Чтобы выразить кубичный корень какого нибудь числа, пишутъ прежде это число и съ лѣвой его стороны помѣщаютъ знакъ корня (радикалъ) $\sqrt[3]{\ }$, въ растворенiи котораго вписываютъ цифру 3.

Такимъ образомъ $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ послѣдовательно выражаютъ собою кубичные корни изъ 125 и изъ $\frac{8}{27}$.

239. Всякое число, если оно кубъ какого нибудь числа цѣлаго или дробнаго, называется *точнымъ кубомъ*.

Мы видѣли (§ 178), что всякое число, если оно не будетъ кубомъ какого либо цѣлаго числа, не можетъ быть кубомъ и дроби; поэтому оно не будетъ точный кубъ. Равномѣрно, несократимая дробь, если ея оба члена неточные кубы, не можетъ быть точнымъ кубомъ (§ 179).

Опредѣленіе § 238 даетъ намъ понятіе только о кубахъ точныхъ. Кубичный корень какого нибудь числа N, которое не есть точный кубъ, опредѣляютъ такъ: *это есть несоизмѣримое число большее чиселъ, кубы которыхъ менѣе* N, *и меньшее чиселъ, кубы которыхъ превышаютъ* N. Понятно, что $\sqrt[3]{N}$ есть дѣйствительно число подходящее подъ общее опредѣленіе § 139, т. е, что $\sqrt[3]{N}$ можетъ собою выражать мѣру какой нибудь величины. Напримѣръ, разсмотримъ путь пробѣгаемый какою нибудь движущеюся точкою, начинающей свое движеніе отъ одной точки неограниченной прямой всегда въ одну и ту же сторону. Пройденный путь, начинаясь съ нуля, будетъ постоянно возрастать, такъ что кубъ числа, выражающаго мѣру пройденнаго пути, сначала меньшій чѣмъ N, въ послѣдствіи можетъ быть значительно болѣе N. Понятно, что въ извѣстный моментъ, пройденный путь, по долинѣ, будетъ наибольшій изъ всѣхъ путей, измѣряющихся числами, кубы которыхъ менѣе N, и наименьшій изъ всѣхъ, измѣряющихся числами, кубы которыхъ превышаютъ N; въ этотъ то моментъ, путь пройденный, движущимся тѣломъ, будетъ измѣряться $\sqrt[3]{N}$ (§ 217).

240. Дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляется кубическій корень изъ какого нибудь числа, называется *извлеченіемъ кубическаго корня.*

Вопросъ предстоящій нашему рѣшенію можетъ быть выраженъ слѣдующими словами:

Дано какое нибудь цѣлое или дробное число N; *какъ извлечь изъ него кубичный корень точный, если* N *будетъ точнымъ кубомъ, въ противномъ же случаѣ съ даннымъ приближеніемъ?*

Рѣшеніе этаго вопроса требуетъ знанія нѣкоторыхъ свойствъ кубовъ, поэтому предварительно займемся ихъ изложеніемъ.

Составленіе куба суммы двухъ частей.

241. Теорема.—*Кубъ суммы двухъ частей равенъ кубу первой части, плюсъ утроенное произведеніе квадрата первой части на вторую, плюсъ утроенное произведеніе первой части на квадратъ второй и плюсъ кубъ второй части.*

Возьмемъ сумму $7+5$. Кубъ ея получится умноживъ квадратъ $(7+5)^2$ или $7^2+2\times5+5^2$ на $7+5$; а произведеніе $7^2+2\times5+5^2$ на 7 есть

$$7^3+2\times7^2\times5+7\times5^2;$$

произведеніе же $7^2+2\times7\times5+5^2$ на 5 есть

$$7^2\times5+2\times7\times5^2+5^3;$$

поэтому

$$(7+5)^3=(7^3+2\times7^2\times5+7\times5^2)+(7^2\times5+2\times7\times5^2+5^3),$$

или

$$(7+5)^3=7^3+3\times7^2\times5+3\times7\times5^2+5^3.$$

Слѣдствіе I.—*Кубъ числа состоящаго изъ десятковъ и единицъ равенъ кубу десятковъ, плюсъ утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, плюсъ утроенное произведеніе десятковъ на квадратъ единицъ и плюсъ кубъ единицъ.* (*).

Слѣдствіе II.—*Разность кубовъ двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ равна тройному квадрату меньшаго числа, плюсъ тройное меньшее число, плюсъ единица.*

Пусть a и $a+1$ будутъ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа; на основаніи предъидущей теоремы имѣемъ

$$(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1,$$

а слѣдовательно

$$(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1.$$

Примѣчанія къ кубамъ цѣлыхъ чиселъ.

242. Девять первыхъ чиселъ суть:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

а кубы ихъ будутъ

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Разсмотрѣніе этой таблицы приводитъ къ нѣкоторымъ полезнымъ примѣчаніямъ.

Предварительно усматриваемъ, что кубъ какого нибудь цѣлаго числа, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, оканчивается тою же цифрою, какую имѣетъ на концѣ кубъ единицъ этаго числа. Это вытекаетъ, какъ изъ правила умноженія, такъ и изъ слѣдствія I § 241.

Далѣе замѣчаемъ, что

1°. *Кубы цылыхъ чиселъ, имьющихъ на концъ* 1, 4, 5, 6 *или* 9, *сами оканчиваются на* 1, 4, 5, 6 *или* 9.

(*) Напр. $75^3=(70+5)^3=70^3+3\times70^2\times5+3\times70\times5^2+5^3$. (Прим. перев.)

2°. *Кубы цѣлыхъ чиселъ, имѣющихъ на концѣ* 2, 3, 7 *или* 8, *оканчиваются на* 8, 7, 3 *или* 2.

Замѣчаемъ также, что кубы цѣлыхъ чиселъ оканчивающихся 1, 2, 3, и т. д. нулями, оканчиваются 3, 6, 9 и т. д. (§ 39).

243. Очевидно что кубы могутъ имѣть на концѣ всякую цифру но:

Цѣлое число имѣющее на концѣ нули, число которыхъ не дѣлимо на 3, *не можетъ быть точнымъ кубомъ.*

Это заключеніе вытекаетъ изъ теоремы § 131. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ 270000. Это число, оканчиваясь числомъ нулей не дѣлящимся на 3, содержитъ однаго или обоихъ множителей 2 и 5 съ показателемъ не дѣлящимся на 3, стало быть оно не можетъ быть точнымъ кубомъ.

Вообще всякое цѣлое члсло не можетъ быть точнымъ кубомъ (§ 131), если высшая степень какого нибудь изъ его первоначальныхъ множителей имѣетъ показателя не дѣлящагося на 3.

244. Кубы степеней 10, напримѣръ,

10, 100, 1000, 10000,....

соотвѣтственно слѣдующія:

1000, 1000000, 1000000000, 1000000000000,.....

Изъ этаго заключаемъ, что кубичный корень числа меньшаго чѣмъ 1000 имѣетъ одну цифру, а число заключающееся между 1000 и 1000000 въ своей цѣлой части имѣетъ двѣ цифры.

Извлеченіе съ точностію до одной единицы кубичнаго корня изъ цѣлаго или дробнаго числа.

245. Пусть N представляетъ цѣлое или дробное число, чрезъ a обозначимъ цѣлую часть $\sqrt[3]{N}$. Этотъ корень будетъ заключаться между a и $a+1$, а N будетъ заключаться между a^3 и $(a+1)^3$; слѣдовательно a^3 будетъ наибольшій изъ цѣлыхъ кубовъ содержащихся въ N. Если N число дробное, то его цѣлая часть по крайней мѣрѣ равна a^3, и такъ какъ она менѣе чѣмъ $(a+1)^3$, то очевидно что:

Кубичный корень, съ точностію до одной единицы, изъ дробнаго числа N *равенъ кубичному корню, съ точностію до одной единицы, изъ цѣлой части числа* N.

Предположимъ теперь, что N цѣлое число и укажемъ какимъ образомъ можно найти цѣлую часть $\sqrt[3]{N}$, или точную величину $\sqrt[3]{N}$ въ частномъ случаѣ, когда N будетъ точнымъ кубомъ.

246. Если N будетъ < 1000, то $\sqrt[3]{N}$ будетъ < 10 (§ 244). Въ этомъ случаѣ, корень получается прямо по таблицѣ кубовъ первыхъ девяти чиселъ (§ 242).

Первый примѣръ.—Пусть $N=512$. Обращаясь къ таблицѣ кубовъ первыхъ девяти чиселъ, увидимъ что 512 есть кубъ 8; поэтому въ точности имѣемъ, что $\sqrt[3]{512}=8$.

Второй примѣръ.— Пусть $N=287$. Число 287 неточный кубъ, находимъ, что оно заключается между двумя послѣдовательными кубами 216 и 343, поэтому его кубичные корни будутъ 6 и 7. Оба эти числа суть величины $\sqrt[3]{N}$, съ точностію до одной единицы, первое съ недостаткомъ, а второе съ избыткомъ.

247. Правило служащее для извлеченія кубичнаго корня, съ точностію до одной единицы, изъ цѣлаго числа большаго 1000, основывается на слѣдующихъ двухъ теоремахъ:

Теорема I.—*Число десятковъ кубичнаго корня изъ цѣлаго числа* $N > 1000$ *равно кубичному корню изъ наибольшаго цѣлаго куба, содержащагося въ числѣ тысячъ числа* N.

Дѣйствительно, пусть N′ будетъ число тысячъ въ N и a число десятковъ въ $\sqrt[3]{N}$. Тогда $\sqrt[3]{N}$ будетъ заключаться между $a\times10$ и $(a+1)\times10$; а N будетъ заключаться между кубами $a\times10^3$ и $(a+1)\times10$ т. е. между $a^3\times1000$ и $(a+1)^3\times1000$. Слѣдовательно, число N′, тысячъ въ N по крайней мѣрѣ равно a^3, но менѣе чѣмъ $(a+1)^3$; другими словами, a^3 есть наибольшій цѣлый кубъ, содержащійся въ N′, корень же этаго наибольшаго куба есть a.

Теорема II.—*Если изъ цѣлаго числа* N *вычесть кубъ десятковъ его кубичнаго корня и раздѣлить число сотенъ остатка на утроенный квадратъ числа десятковъ корня, то полученное частное будетъ равно или болѣе цифры единицъ корня.*

Дѣйствительно, пусть a будетъ число десятковъ въ $\sqrt[3]{N}$ и b цифра единицъ этаго корня. Цѣлая часть въ $\sqrt[3]{N}$ бу-

детъ $a\times10+b$; слѣдовательно N по крайней мѣрѣ будетъ равно $(a\times10+b)^3$, т. е. по крайней мѣрѣ будетъ равно

$$a^3\times1000+3a^2\times100\times b+3a\times10\times b^2+b^3.$$

Стало быть, если изъ N вычтемъ кубъ десятковъ его корня, т. е. $a^3\times1000$, то остатокъ $N-a^3\times1000$, который мы обозначимъ чрезъ R будетъ по крайней мѣрѣ равенъ

$$3a^2\times100\times b+3a\times10\times b^2+b^3$$

и будетъ содержать не менѣе $3a^2\times100$ сотенъ. Изъ этаго слѣдуетъ, что если раздѣлить на $3a^2$ число сотенъ въ R, то полученное частное будетъ равно или будетъ превышать b.

248. Положивъ это, возьмемъ число 43725658 и извлечемъ изъ него кубичный корень, съ точностію до одной единицы.

Такъ какъ предложенное число болѣе 1000, то его кубичный корень будетъ болѣе 10, и, по теоремѣ I, число десятковъ этаго корня равно кубичному корню изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ 43725 тысячахъ числа 43725658. Поэтому слѣдуетъ прежде найти цѣлую часть $\sqrt[3]{43725}$.

Такъ какъ и число 43725 тоже превышаетъ 10 00, то его кубичный корень будетъ превышать 10, и, по теоремѣ I, число десятковъ этаго корня равно кубичному корню изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ 43 тысячахъ числа 43725. Поэтому слѣдуетъ прежде найти цѣлую часть $\sqrt[3]{43}$.

Такъ какъ число 43 менѣе чѣмъ 1000 т о цѣлая часть его кубичнаго корня будетъ только въ одну цифру. Находимъ (§ 242), что 43 заключается между 27 и 64, слѣдовательно его кубичные корни будутъ послѣдовательно 3 и 4. А потому цѣлая часть $\sqrt[3]{43}$ есть 3.

Такимъ образомъ кубичный корень изъ 43725 содержитъ 3 десятка; теперь приступимъ къ отысканію цифры единицъ этаго корня. Избытокъ числа 43 надъ кубомъ 27 будамъ 16, и очевидно, что если вычесть изъ 43725 кубъ 3 десятковъ т. е. 27 тысячъ, то остатокъ будетъ содержать въ себѣ 16 тысячъ и 725 единицъ, т. е. онъ будетъ 16725. Но, по теоремѣ II, если раздѣлить число 167 сотенъ остатка на утроенный квадратъ числа десятковъ корня, т. е. на 3×9 или 27, то полученное частное будетъ равно или будетъ пре-

вышать цифру единицъ корня; а потому цѣлая часть $\sqrt[3]{43725}$ будетъ равна или болѣе 36. Чтобы убѣдиться, что цифра единицъ корня есть дѣйствительно 6, должно составить кубъ 36 и посмотрѣть можетъ ли быть вычтенъ этотъ кубъ изъ 43725. Возвышая 36 въ кубъ получаемъ 46656, число превышающее 43725, а потому заключаемъ, что цифра 6 велика. Затѣмъ, точно также должно изслѣдовать цифру 5. Возвышая 35 въ кубъ, получаемъ въ результатѣ 42875, число меньшее чѣмъ 43725, поэтому и принимаемъ, что цѣлая часть $\sqrt[3]{43725}$ есть 35.

Теперь возвратимся къ данному числу 43725658. Его кубичный корень содержитъ 35 десятковъ, остается приступить къ отысканію цифры единицъ этаго корня. Избытокъ 43725 надъ 42875, кубомъ 35, есть 850, и очевидно, что если вычесть изъ 43725658 кубъ 35 десятковъ т. е. 42875 тысячъ, то получится остатокъ 850 тысячъ и 658 единицъ или 850658. Но, по теоремѣ II, если раздѣлитъ число 8506 десятковъ этаго остатка на утроенный квадратъ числа десятковъ корня т. е. на 3×35^2 или 3675, то полученное частное 2 будетъ равно, или будетъ превышать цифру единицъ корня; поэтому цѣлая часть $\sqrt[3]{43725658}$ будетъ равна или менѣе 352. Чтобы узнать, что дѣйствительно ли цифра единицъ корня есть 2, должно составить кубъ 352 и посмотрѣть можетъ ли быть онъ вычтенъ изъ 43725658. Возвышая 352 въ кубъ получаемъ въ результатѣ 43614208, число меньшее числа 43725658; почему и заключаемъ, что цѣлая часть $\sqrt[3]{43725658}$ есть дѣйствительно 352. Избытокъ предложеннаго числа 43725658 надъ 43614208, кубомъ 352, есть 111450.

249. Предъидущія разсужденія приводятъ къ слѣдующему правилу:

Чтобы извлечь, съ точностію до одной единицы, кубичный корень изъ цѣлаго числа, это число раздѣляютъ на грани въ три цифры, отъ лѣвой руки къ правой. Число этихъ граней, изъ которыхъ первая справа можетъ быть въ одну или въ двѣ цифры, равно числу цифръ корня.

Изъ наибольшаго цѣлаго куба, содержащагося въ числѣ представляемомъ первою слѣва гранью, извлекаютъ кубичный корень и такимъ образомъ получаютъ первую цифру корня.

Изъ этой цифры составляютъ кубъ и вычитаютъ его изъ первой слѣва грани, потомъ сносятъ къ правой сторонѣ остатка первую цифру второй грани. Полученное отъ этаго число дѣлятъ на утроенный квадратъ первой цифры корня. Цѣлое частное отъ этаго дѣленія будетъ равно или будетъ превышать вторую цифру корня. Чтобы убѣдиться, будетъ ли это частное искомою цифрою корня, ее приписываютъ справа къ первой цифрѣ корня и полученное число возвышаютъ въ кубъ. Если этотъ кубъ можно будетъ вычесть изъ числа составленнаго первыми двумя гранями, то испытуемая цифра вѣрна; въ противномъ случаѣ, такимъ же образомъ испытываютъ цифру на единицу меньшую и такъ до тѣхъ поръ, пока не получатъ вѣрной цифры.

Когда вторая цифра корня будетъ пріискана и кубъ числа, составленнаго первыми двумя цифрами корня, вычтенъ изъ числа, состоящаго изъ первыхъ двухъ граней, тогда справа къ остатку сносятъ первую цифру третьей грани. Образовавшееся отъ этаго число дѣлятъ на утроенный квадратъ числа, состоящаго изъ двухъ первыхъ цифръ корня. Цѣлое частное отъ этаго дѣленія будетъ равно или будетъ болѣе третьей цифры корня. Чтобы убѣдиться дѣйствительная ли полученная цифра, ее приписываютъ справа къ числу, состоящему изъ первыхъ двухъ цифръ корня, и полученный результатъ возвышаютъ въ кубъ. Если этотъ кубъ можно будетъ вычесть изъ числа состоящаго изъ трехъ первыхъ граней, то испытуемая цифра вѣрна; въ противномъ же случаѣ, для испытанія берутъ цифру на единицу меньшую, которая уже будетъ вѣрна. (*).

Въ такомъ порядкѣ дѣйствіе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока всѣ грани будутъ снесены. Избытокъ даннаго числа надъ кубомъ полученнаго корня называется остаткомъ дѣйствія. Если этотъ остатокъ будетъ нуль, то будемъ имѣть точный корень изъ даннаго числа, въ противномъ же случаѣ мы будемъ имѣть только цѣлую часть этаго корня, или его величину съ точностію до одной единицы съ недостаткомъ.

Примѣчаніе I.—При какомъ нибудь изъ дѣленій, производящихся для отысканія различныхъ цифръ корня, начиная со втораго, можетъ встрѣтиться, что цѣлое частное будетъ превышать 9, въ этомъ случаѣ испытаніе производятъ все-таки съ цифры 9.

(*) Смотри въ концѣ главы 6-е упражненіе.

Примѣчаніе II.—При какомъ нибудь изъ дѣленій, можетъ также встрѣтиться, что цѣлое частное будетъ нуль, въ этомъ случаѣ, приписываемая къ корню цифра будетъ тоже нуль.

250. Самое дѣйствіе располагается такъ. Возьмемъ для примѣра число 43725658, которое уже служило намъ для вывода правила.

43725658 | 352		35	352
27 | $27=3\times3^2$		35	352
167 | $3675=3\times35^2$		175	704
		105	1760
43725		1225	1056
42875		35	123904
8506		6125	352
		3675	247808
43725658		42875	619520
43614208			371712
111450			43614208

251. *Остатокъ получающійся отъ извлеченія кубичнаго корня изъ цѣлаго числа, съ точностію до одной единицы, долженъ быть менѣе утроеннаго квадрата корня, плюсъ утроеннаго самого корня плюсъ единицы.*

Для доказательства возьмемъ число N и пусть a будетъ его корень и R остатокъ. Имѣемъ

$$N = a^3 + R.$$

Предположимъ, если возможно, что

$$R = \text{или} > a + 3a + 1,$$

къ обѣимъ частямъ прибавимъ по a^3, получимъ

$$a^3 + R \text{ или } N = \text{или} > a^3 + 3a^2 + 3a + 1,$$

значитъ

$$N = \text{или} > (a+1)^3$$

чего невозможно допустить, ибо по предположенію, a^3 есть наибольшій цѣлый кубъ заключающійся въ N.

Примѣчаніе.—Изъ этаго слѣдуетъ, что при извлеченіи кубичнаго корня изъ цѣлаго, каждый послѣдовательно получающійся остатокъ будетъ болѣе утроеннаго квадрата числа, состоящаго изъ найденныхъ уже цифръ, плюсъ утроеннаго того же числа.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ цѣлаго или дробнаго числа съ даннымъ приближеніемъ.

252. Пусть N будетъ цѣлое или дробное число и предложимъ себѣ извлечь изъ него кубичный корень съ точностію до $\frac{1}{n}$. Это значитъ (§ 197), слѣдуетъ найти цѣлое x и притомъ такое, чтобы

$$\frac{x}{n} < \sqrt[3]{N} \text{ и } \frac{x+1}{n} > \sqrt[3]{N},$$

или возвышая въ кубъ,

$$\frac{x^3}{n^3} < N \text{ и } \frac{(x+1)^3}{n^3} > N,$$

наконецъ, раздѣляя вторыя части на n^3, получаемъ

$$x^3 > Nn^3 \text{ и } (x+1)^3 > Nn^3.$$

Послѣднія неравенства показываютъ, что x^3 есть наибольшій цѣлый кубъ заключающійся въ Nn^3; слѣдовательно искомое число x есть кубичный корень изъ Nn^3 съ недостаткомъ меньшимъ одной единицы.

Предъидущее разсужденіе приводитъ къ слѣдующему правилу.

Чтобы извлечь кубичный корень изъ цѣлаго или дробнаго числа N *съ точностію до* $\frac{1}{n}$, *должно извлечь, съ точностію до одной единицы, кубичный корень изъ произведенія* Nn^3 *и результатъ раздѣлить на* n.

Первый примѣръ. — Требуется вычислить $\sqrt[3]{19}$ съ точностію до $\frac{1}{7}$. Кубичный корень съ точностію до одной единицы изъ произведенія $19 \times 7^3 = 6517$ есть 18 или 19. Слѣдовательно $\frac{18}{7}$ и $\frac{19}{7}$ суть приближенныя величины $\sqrt[3]{19}$ съ точностію до $\frac{1}{7}$, первая съ недостаткомъ, а вторая съ избыткомъ.

Второй примѣръ.—Требуется вычислить $\sqrt[3]{\frac{355}{113}}$ съ точностію до $\frac{1}{7}$. Предварительно должно вычислить кубичный корень съ точностію до одной единицы изъ произведенія

$$\frac{355}{113} \times 7^3 = \frac{121765}{113} = 1077 + \frac{64}{113},$$

т. е. (§ 245) кубичный корень, съ точностію до одной единицы, изъ цѣлой части 1077. Величины $\sqrt[3]{1077}$ съ точностію

до одной единицы будутъ 10 или 11. Слѣдовательно $\frac{10}{7}$ и $\frac{11}{7}$ суть приближенныя величины $\sqrt[3]{\frac{355}{113}}$ съ точностію до $\frac{1}{7}$, первая съ недостаткомъ, а вторая съ избыткомъ.

253. *Когда знаменатель какой нибудь дроби есть какой нибудь точный кубъ* b^3, *то кубичный корень изъ этой дроби, съ точностію до одной* $\frac{1}{b}$, *получится извлекая кубичный корень, съ точностію до одной единицы, изъ числителя и раздѣляя результатъ на* b.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ дробь $\frac{a}{b^3}$, изъ который требуется извлечь кубичный корень съ точностью до $\frac{1}{b}$. По правилу § 252 должно извлечь съ точностію до одной единицы кубичный корень изъ произведенія $\frac{a}{b^3} \times b^3 = a$ и результатъ раздѣлить на b.

Примѣчаніе I.—Изъ этого заключаемъ, что если оба члена какой нибудь дроби будутъ точные кубы, то точный кубичный корень изъ этой дроби получится, извлекая кубичный корень изъ обоихъ ея членовъ. Сверхъ того, тоже вытекаетъ и изъ правила возвышенія дроби въ кубъ (§ 147).

Примѣчаніе II.—Можно всегда достигнуть того, чтобы знаменатель всякой дроби былъ точный кубъ. Для этого достаточно умножить оба члена дроби на квадратъ знаменателя. Такъ, $\frac{a}{b}$ равно $\frac{ab^2}{b^3}$, а эта дробь имѣетъ знаменателемъ точный кубъ.

Знаменателя дроби также можно сдѣлать точнымъ кубомъ, умножая оба члена этой дроби на каждаго изъ первоначальныхъ множителей, находящихся въ знаменателѣ съ показателями равными кратному для 3, увеличенному на 2 и на квадратъ каждаго изъ первоначальныхъ множителей находящихся въ знаменателѣ, съ показателемъ равнымъ кратному для 3 увеличенному на 1. Прилагая это правило къ какой нибудь несократимой дроби *мы этимъ приведемъ ее къ наименьшему кубичному знаменателю.*

Вычисленіе въ десятичныхъ знакахъ кубичнаго корня изъ цѣлаго или дробнаго числа.

254. Сначала возьмемъ цѣлое число N и положимъ, что требуется вычислить $\sqrt[3]{N}$ съ точностію до $\frac{1}{10^n}$. По § 252, дол-

жно: 1) умножить N на кубъ отъ 10^n т. е. на 10^{3n}; 2) извлечь съ точностію до единицы кубическій корень изъ произведенія; 3) раздѣлить результатъ на 10^n. Это правило очевидно можетъ быть выражено такъ:

Чтобы извлечь съ точностію до $\frac{1}{10^n}$ *кубичный корень изъ цѣлаго числа* N, *съ правой стороны* N *приписываютъ* 3n *нулей, изъ полученнаго числа извлекаютъ кубичный корень съ точностію до одной единицы и отдѣляютъ справа въ результатѣ* n *десятичныхъ знаковъ.*

Примѣръ.—Требуется вычислить $\sqrt[3]{2}$ съ точностію до $\frac{1}{100}$. Величина $\sqrt[3]{2000000}$ съ точностію до одной единицы есть 125 или 126. Слѣдовательно 1,25 и 1,26 суть величины $\sqrt[3]{2}$ съ точностію до 0,01, первая съ недостаткомъ, а вторая съ избыткомъ.

253. Возьмемъ теперь дробное число N и положимъ, что требуется вычислить $\sqrt[3]{N}$ съ точностію до $\frac{1}{10^n}$. Для этого должно (§§ 245 и 252): 1^0 умножить N на 10^{3n}; 2^0 исключить цѣлое изъ произведенія; 3^0 извлечь кубичный корень изъ этого цѣлаго съ точностію до одной единицы; 4^0 результатъ раздѣлить на 10^n. Это правило очевидно можетъ быть выражено такъ:

Чтобы извлечь съ точностію до $\frac{1}{10^n}$ *кубичный корень изъ дробнаго числа, это число вычисляютъ съ точностію до* $\frac{1}{10^{3n}}$ *отбрасываютъ запятую и потомъ извлекаютъ съ точностію до одной единицы кубичный корень изъ полученнаго цѣлаго числа и отдѣляютъ справа въ результатѣ* n *цифръ.*

Первый примѣръ.—Требуется вычислить $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ съ точностію до $\frac{1}{10^3}$ т. е. до 0,001. Величина $\frac{5}{7}$ вычисленная до $\frac{1}{10^9}$ есть 0,714285714 Величины корня изъ 714285714 съ точностію до единицы будутъ 893 и 894; слѣдовательно 0,893 и 0,894 суть величины $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ съ точностію до 0,001, первая съ недостаткомъ а вторая съ избыткомъ.

Второй примѣръ.—Требуется вычислить $\sqrt[3]{3,14}$ съ точностію до 0,1. По правилу, должно 3,14 выразить въ трехъ десятичныхъ, чего достигаемъ приписко̀ю къ нему справа одного нуля. Отбросивъ запятую, получимъ число 3140. Находимъ, что величины $\sqrt[3]{3140}$ съ точностію до единицы суть 14 и 15, слѣдовательно величины $\sqrt[3]{2,14}$ съ точностію до $\frac{1}{10}$ суть 1,4 и 1,5.

Упражненія.

1) Доказать, что цѣлое число не можетъ быть точнымъ кубомъ, если цифра его единицъ будетъ 2 или 6, а цифра десятковъ четная.

2) Доказать, что цѣлое число не можетъ быть точнымъ кубомъ, если цифра его единицъ будетъ 4 или 8, а цифра десятковъ нечетная.

3) Доказать, что цѣлое число не можетъ быть точнымъ кубомъ, если цифра его единицъ будетъ 5, а цифра десятковъ не будетъ ни 2 ни 7.

4) Если написать, одни за другими, цифры представляющія десятки послѣдовательныхъ, оканчивающихся одною и тою же цифрою, но не нулемъ, кубовъ; то полученный рядъ будетъ періодическій и періодъ будетъ въ 5 цифръ.

5) Какъ узнать будетъ ли данное цѣлое число разностію двухъ кубовъ и, въ томъ случаѣ, если оно будетъ разностію, какъ найти эти два куба?

6) Когда опредѣлены одна или нѣсколько цифръ кубическаго корня изъ цѣлаго числа и требуется найти слѣдующую цифру, то производятъ дѣленіе, котораго частное или будетъ искомою цифрою, или цифрою большею. Требуется доказать, что если число, представляемое уже написанными цифрами въ корнѣ, будетъ равно или болѣе десяти, то частное, о которомъ говорится, если и превышаетъ искомую цифру, то ни какъ не болѣе чѣмъ на одну единицу.

ГЛАВА III.

ТЕОРІЯ НЕСОИЗМѢРИМЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

О дѣйствіяхъ вообще. — Распространеніе теоремъ, относящихся къ дѣйствіямъ, на несоизмѣримыя числа.—О корняхъ вообще.—Вычисленія надъ кореннымъ вараженіями.—Извлеченіе квадратнаго корня съ даннымъ приближеніемъ изъ несоизмѣримаго числа.—Сокращенный способъ извлеченія квадратнаго корня изъ числа дробнаго или несоизмѣримаго.—Сокращенный способъ извлеченія квадратнаго корня изъ числа цѣлаго.—Извлеченіе кубичнаго корня съ даннымъ приближеніемъ изъ числа несоизмѣримаго.—Извлеченіе корней, которыхъ показатели состоятъ только изъ множителей 2 и 3.

О дѣйствіяхъ вообще.

256. Прежде чѣмъ идти далѣе въ изученіи чиселъ, необходимо, опредѣленія ариѳметическихъ дѣйствій, данныя въ предъидущемъ, распространить такъ, чтобы они относились не только до чиселъ соизмѣримыхъ, но обнимали бы собою всѣ случаи. А такъ какъ дѣйствіе производимое надъ числами представляетъ собою дѣйствіе производимое надъ величинами, между тѣмъ несоизмѣримыя числа не могутъ быть намъ извѣстны, когда ими выражаемыя величины не будутъ хорошо опредѣлены, то прежде всего необходимо указать, въ общемъ видѣ, значеніе дѣйствій производящихся надъ величинами.

Сумма нѣсколькихъ однородныхъ величинъ есть величина, составленная изъ частей соотвѣтственно равныхъ даннымъ величинамъ.

Разность двухъ однородныхъ величинъ есть величина, которую должно придать къ меньшей изъ данныхъ величинъ, чтобы получить большую величину.

Произведеніе какой нибудь величины на цѣлое есть сумма столькихъ величинъ, сколько будетъ единицъ въ цѣломъ.

Произведеніе какой нибудь величины на дробь есть указанная дробью часть этой величины. Такимъ образомъ произ-

веденіе какой нибудь величины на $\frac{5}{7}$ есть пять седьмыхъ этой величины.

Произведеніе какой нибудь величины на несоизмѣримое число N опредѣляютъ такъ: это есть величина бо́льшая чѣмъ произведенія данной величины на соизмѣримыя числа меньшія чѣмъ N, и меньшая величина чѣмъ произведенія данной величины на числа соизмѣримыя, превышающія N.

Частное отъ дѣленія всякой величины на какое нибудь число есть величина, которую должно умножить на данное число, чтобы получить данную величину.

257. Послѣ этого, слѣдующія опредѣленія сложенія и умноженія будутъ приложимы ко всѣмъ случаямъ:

Сложеніе имѣетъ цѣлью найти число, выражающее величину равную суммѣ величинъ, выраженныхъ данными числами.

Результатъ дѣйствія во всѣхъ случаяхъ называется *суммою*.

Умноженіе имѣетъ цѣлью найти число, выражающее величину равную произведенію на данное число величины, выраженной вторымъ даннымъ числомъ.

Во всѣхъ случаяхъ, число, которое умножается называется *множимымъ*; число на которое множатъ—*множителемъ*; результатъ дѣйствія—*произведеніемъ*.

Примѣчаніе I.—Сравнивая это общее опредѣленіе умноженія съ опредѣленіемъ § 162, видно, что оба они приложимы всегда, когда множитель будетъ числомъ соизмѣримымъ:

Примѣчаніе II.—Въ случаѣ же, когда множитель будетъ числомъ несоизмѣримымъ, то по нашему общему опредѣленію выходитъ, что *произведеніе есть число большее изъ произведеній, получаемыхъ отъ умноженія множимаго на соизмѣримыя числа, меньшія чѣмъ множитель, и меньшее изъ произведеній, получаемыхъ отъ умноженія множимаго на соизмѣримыя числа, превышающія множителя.* Важно при этомъ то, что это опредѣленіе позволяетъ искомое произведеніе представлять себѣ заключающимся между двумя числами, разность которыхъ между собою можетъ быть такъ мала, какъ того пожелаютъ. Дѣйствительно, такъ какъ множитель по предположенію несоизмѣримъ, то вычислимъ его съ точностію до $\frac{1}{n}$; пусть $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ будутъ представлять собою тѣ дроби, между которыми онъ заключается. Произведеніе, согласно опредѣле-

нію, будетъ заключаться между m разъ n-вой частью и $m+1$ разъ той же частью множимаго; т. е. будетъ заключаться между двумя числами, которыхъ разность можетъ быть сдѣлано менѣе всякаго даннаго числа, потому что n число произвольное и можетъ быть принято на столько большимъ, что n-вая часть множимаго будетъ на столько мала, на сколько того пожелаютъ.

Вычитаніе и *дѣленіе* суть дѣйствія обратныя сложенію и умноженію; опредѣленія §§ 159 и 167 приложимы во всѣхъ случаяхъ.

Опредѣленія §§ 79, 219 и 238 относящіяся къ *возвышенію въ степень*, къ *извлеченію квадратныхъ*, а также и *кубичныхъ корней* точно также приложимы во всѣхъ случаяхъ.

Распространеніе теоремъ, относящихся къ дѣйствіямъ, на числа несоизмѣримыя.

258. Мы усматриваемъ какъ очевидное что:

Результатъ дѣйствій производимыхъ надъ несоизмѣримыми числами можетъ быть полученъ съ приближеніемъ настолько большимъ, насколько того пожелаютъ, принимая вмѣсто этихъ чиселъ соизмѣримыя и достаточно къ нимъ приближенныя величины; *или другими словами, что*

Результатъ дѣйствій производимыхъ надъ несоизмѣримыми числами есть предѣлъ результатовъ получаемыхъ, принимая вмѣсто этихъ чиселъ послѣдовательныя соизмѣримыя величины, приближающіяся къ нимъ неопредѣленно.

259. Изъ этаго слѣдуетъ, что ту основную теорему, которая была прежде доказана, въ случаѣ чиселъ цѣлыхъ и дробныхъ, можно распространить на всѣ случаи, а именно:

Въ произведеніи нѣсколькихъ множителей, порядокъ ихъ можно измѣнять произвольно.

Дѣйствительно, возьмемъ произведеніе abc, въ которомъ будетъ по крайней мѣрѣ одинъ несоизмѣримый множитель. Это произведеніе (§ 258) есть предѣлъ произведеній, получающихся отъ замѣны несоизмѣримыхъ множителей болѣе или менѣе близкими соизмѣримыми ихъ величинами. Но таковыя произведенія независимы отъ порядка множителей; слѣдовательно и произведеніе abc не будетъ отъ него зависимо.

Слѣдствія выведенныя нами изъ этой теоремы въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ (§§ 74 и слѣдующія) и распространенныя

потомъ на числа дробныя, должны быть установлены для всѣхъ случаевъ, будутъ ли разсматриваться числа соизмѣримыя или несоизмѣримыя.

Такимъ образомъ вообще можно сказать что:

1°. *Чтобы умножить или раздѣлить какое нибудь число на произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей, можно умножить или раздѣлить это число на перваго множителя, полученный результатъ умножить или раздѣлить на втораго множителя и такъ далѣе, пока будутъ употреблены всѣ множители.*

2°. *Чтобы перемножить два произведенія, достаточно составить одно произведеніе изъ множителей множимаго и множителя.*

3°. *Въ произведеніи нѣсколькихъ множителей, какое нибудь число множителей можно замѣнять вычисленнымъ изъ нихъ произведеніемъ.*

4°. *Чтобы умножить или раздѣлить произведеніе на какое нибудь число, достаточно на это число умножить или раздѣлить одного изъ множителей даннаго произведенія.*

5°. *Чтобы перемножить двѣ или нѣсколько степеней одного и того же числа, достаточно сложить показателей этихъ степеней.*

6°. *Чтобъ раздѣлить одну степень на другую одного и того же числа, достаточно вычесть показателя дѣлителя изъ показателя дѣлимаго.*

7°. *Чтобы одну степень возвести въ другую, достаточно умножить показателя первой на показателя второй.*

8°. *Чтобы возвести въ степень произведеніе, достаточно возвести въ эту степень каждаго изъ множителей этого произведенія.*

260. Теоремы доказанныя въ §§ 184 и слѣдующихъ, которыя всѣ выводятся изъ вышеприведенныхъ началъ, приложимы, какъ къ дробямъ члены которыхъ соизмѣримы, такъ и къ дробямъ съ членами несоизмѣримыми. Такимъ образомъ вообще можно сказать, что:

1°. *Дробь не измѣняетъ своей величины, если оба ея члена умножить на одно и тоже соизмѣримое или несоизмѣримое число.*

2°. *Чтобы перемножить нѣсколько дробей, достаточно перемножить ихъ почленно.*

3°. *Чтобы раздѣлить двѣ дроби одну на другую, достаточно умножить дробь дѣлимаго на обратную дробь дѣлителя.*

4°. *Чтобы возвысить дробь въ степень, достаточно оба ея члена возвысить въ эту степень.*

261. Можно также разспространить на всѣ случаи слѣдующую теорему, доказанную въ § 69, для частнаго случая цѣлыхъ чиселъ:

Чтобы умножить сумму на какое нибудь число, достаточно каждую часть данной суммы умножить на это число.

Во первыхъ, предположимъ, что число, на которое должно умножить данную сумму, соизмѣримо, а также соизмѣримы и разныя части этой суммы, которыя потому всегда могутъ быть приведены къ общему знаменателю.

Дано, напримѣръ, умножить $\frac{4}{12}+\frac{5}{12}+\frac{9}{12}$ на $\frac{3}{7}$; пишемъ

$$\left(\frac{4}{12}+\frac{5}{12}+\frac{9}{12}\right)\times\frac{3}{7}=\frac{4+5+9}{12}\times\frac{3}{7}=\frac{(4+5+9)\times 3}{12\times 7}$$

но $(4+5+9)\times 3=4\times 3+5\times 3+9\times 3$, слѣдовательно

$$\left(\frac{4}{12}+\frac{5}{12}+\frac{9}{12}\right)\times\frac{3}{7}=\frac{4\times 3+5\times 3+9\times 3}{12\times 7}=$$

$$\frac{4\times 3}{12\times 7}+\frac{5\times 3}{12\times 7}+\frac{9\times 3}{12\times 7}=\frac{4}{12}\times\frac{3}{7}+\frac{5}{12}\times\frac{3}{7}+\frac{9}{12}\times\frac{3}{7}.$$

Во вторыхъ, положимъ, что различныя части суммы и число на которое должно множить, не всѣ будутъ соизмѣримы. Дано, напримѣръ, умножить $a+b+c$ на m, я говорю что

$$(a+b+c)\times m=am+bm+cm.$$

Дѣйствительно, если мы несоизмѣримыя числа a, b, c, m замѣнимъ соизмѣримыми, достаточно близкими къ нимъ величаниями, то получимъ два результата, которые такъ мало будутъ разнствовать отъ $(a+b+c)m$ и отъ $am+bm+cm$, какъ того пожелаемъ, согласно (§ 258); а такъ какъ оба эти результата, по доказанному уже, равны, то выходитъ что и между числами $(a+b+c)m$ и $am+bm+cm$ нельзя предположить какой либо опредѣленной разности, слѣдовательно и числа эти будутъ равны.

Примѣчаніе.—Изъ этаго заключаемъ что:

Для раздѣленія суммы на какое нибудь число, достаточно раздѣлить каждую часть суммы на это число.

Дѣйствительно, пусть дано раздѣлить сумму $a+b+c$ на m, изъ предъидущаго мы имѣемъ

$$a+b+c=\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)\times m$$

откуда, раздѣляя какъ одну такъ и другую часть на m получимъ:

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}.$$

262. Слѣдствія, выведенныя нами изъ предъидущей теоремы, для случая цѣлыхъ чиселъ, (§§ 70 и 71) могутъ быть вообще постановлены такъ:

1°. *Чтобы умножить двѣ суммы одну на другую, достаточно умножить каждую часть первой на каждую часть второй и сложить потомъ всѣ полученныя произведенія.*

Изъ этого заключаемъ, что теоремы §§ 222 и 241, относящіяся къ составленію квадрата и куба суммы $a+b$, возможны во всѣхъ случаяхъ, будутъ ли a и b соизмѣримыми или несоизмѣримыми.

2°. *Чтобы умножить разность двухъ чиселъ на третье число, достаточно умножить оба первыхъ числа на третье и изъ большаго произведенія вычесть меньшее.*

Изъ этого непосредственно заключаемъ что:

Для дѣленія разности двухъ чиселъ на третье число, достаточно раздѣлить оба первыхъ числа на третье и изъ большаго частнаго вычесть меньшее.

О корняхъ вообще.

263. Корень m-вой степени изъ какого нибудь соизмѣримаго числа N есть число, которое слѣдуетъ возвести въ m-вую степень, чтобы получить число N.

Чтобы выразить m-вый корень изъ какого нибудь числа, пишутъ прежде это число, а потомъ слѣва къ нему приписываютъ знакъ $\sqrt[m]{\ }$, въ растворенiи котораго помѣщаютъ число m, называемое *показателемъ* или *степенью* корня.

Такъ $\sqrt[7]{8}$ выражаетъ корень седьмой степени изъ 8.

Когда показателемъ корня будетъ 2, то его не пишутъ; такъ, квадратный корень изъ N изображаютъ всегда чрезъ $\sqrt{N}$, какъ и было нами принимаемо до сихъ поръ.

264. Если какое нибудь цѣлое число не будетъ m-вою степенью другаго числа (§ 178), оно не будетъ m-вою степенью и дроби; и его m-вый корень будетъ числомъ несоизмѣримымъ. Таковымъ же буде тъи корень m-вой степени изъ несократимой дроби, если оба ея члена не будутъ m-выми степенями двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Вычисленія надъ коренными выраженіями.

265. Слово *корень* употребляется не только для названія знака $\sqrt{\ }$, но служитъ также и для обозначенія результата дѣйствія, выражаемаго этимъ знакомъ.

Теорема I.—*Произведеніе нѣсколькихъ корней* m-вой *степени равно корню* m-вой *степени изъ произведенія чиселъ стоящихъ подъ этими корнями.*

Дано три корня m-вой степени

$$\sqrt[m]{a},\quad \sqrt[m]{b},\quad \sqrt[m]{c};$$

я говорю, что

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}.$$

Дѣйствительно, чтобы произведеніе $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}$ возвести въ m-вую степень, достаточно возвести въ m-вую степень каждаго множителя, тогда въ результатѣ получимъ abc, изъ чего слѣдуетъ, что $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}$ есть корень m-вый изъ abc; стало быть теорема доказана.

Слѣдствіе I.— *Корень* m-вый *изъ произведенія равенъ произведенію* mвыхъ *корней изъ множителей.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ произведеніе abc. Основываясь на предъидущей теоремѣ, получимъ что

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}.$$

Слѣдствіе II. *Чтобы умножить корень* mвой *степени на какого нибудь множителя, достаточно умножить подкоренное число на* mвую *степень этаго множителя.*

Дано умножить $\sqrt[m]{a}$ на b. Но $b = \sqrt[m]{b^m}$, тогда по предъидущей теоремѣ,

$$\sqrt[m]{a} \times b = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b^m} = \sqrt[m]{ab^m}.$$

Примѣчаніе. — Когда такимъ образомъ замѣняютъ произведеніе $b \times \sqrt[m]{a}$ выраженіемъ $\sqrt[m]{ab^m}$, то говорятъ: *множителя*

b вводятъ подъ корень. Наоборотъ, можно $\sqrt[m]{a\,b^m}$, замѣнить произведеніемъ $b \times \sqrt[m]{a}$, тогда говорятъ: *множителя b выводятъ изъ подъ корня.*

266. Теорема II.—*Частное двухъ корней* m-*вой степени равно* m-*вому корню изъ частнаго чиселъ стоящихъ подъ корнями.*

Въ самомъ дѣлѣ, даны два корня *m*-вой степени,

$$\sqrt[m]{a},\ \sqrt[m]{b};$$

но вѣдь $a = \frac{a}{b} \times b$, а по теоремѣ I имѣемъ.

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[m]{b},$$

раздѣливъ же обѣ части равенства на $\sqrt[m]{b}$,

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Слѣдствіе,—m-*вый корень изъ дроби равенъ частному* m-*выхъ корней обоихъ ея членовъ.*

267. Теорема III.—*Для возведенія корня въ степень, достаточно возвести въ эту степень подкоренное число.*

Данъ корень $\sqrt[m]{a}$ и положимъ, что требуется возвести его въ 4-ю степень. Имѣемъ (§ 265) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^4 = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a \times a \times a \times a} = \sqrt[m]{a^4}$. Или вообще, это выражается такъ:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

268. Теорема IV.—*Чтобы извлечь* n-*вый корень изъ какого нибудь корня, достаточно умножить на* n *показателя этого корня.*

Возьмемъ корень $\sqrt[m]{a}$, я говорю, что

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Дѣйствительно, возведемъ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ въ степень m. Для этаго достаточно возвести этотъ корень въ n-вую степень, потомъ полученный результатъ возвести въ m-вую степень, что въ окончательномъ результатѣ дастъ a. Изъ чего слѣдуетъ, что $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ есть корень mn-вый изъ a.

Слѣдствіе.—Чтобы извлечь изъ какого нибудь числа корень, котораго показатель есть произведеніе какихъ нибудь множителей m, n, p, достаточно, извлечь корень m-вый изъ a, потомъ n-вый корень изъ результата и наконецъ корень степени p, изъ втораго результата.

Слѣдовательно, по предъидущей теоремѣ, имѣемъ

$$\sqrt[mnp]{a} = \sqrt[np]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}.$$

269. Теорема V.—*Корень величины своей не измѣнитъ, если его показателя умножить на какое нибудь число* n *и въ тоже время возвысить въ* n-вую *степень число состоящихъ подъ корнемъ.*

Возьмемъ корень $\sqrt[m]{a}$. Я говорю что

$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a};$$

и дѣйствительно, ибо каждый изъ корней есть n-вая степень $\sqrt[mn]{a}$ (§§ 267 и 268).

270. *Приведеніе корней къ общему показателю.*—Послѣдняя теорема позволяетъ приводить нѣсколько различныхъ корней къ одному и тому же показателю.

Возьмемъ, напримѣръ, два корня

$$\sqrt[3]{3} \quad \text{и} \quad \sqrt[2]{2};$$

имѣемъ

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\times 2]{3^2} = \sqrt[6]{27},$$

$$\sqrt[2]{2} = \sqrt[3\times 2]{2^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Вообще, *чтобы нѣсколько корней привести къ общему показателю, умножаютъ показателя каждаго корня на произведеніе прочихъ показателей, возвышая при этомъ каждое изъ подкоренныхъ чиселъ въ степень, имѣющую показателемъ произведеніе показателей прочихъ корней.*

Корни можно также приводить къ общему наименьшему кратному показателю.

Примѣчаніе.—Приведеніе корней къ общему показателю даетъ возможность, однимъ корнемъ замѣнять произведеніе или частное корней съ разными показателями.

Возьмемъ два корня $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}$. Приводя къ общему показателю, мы ихъ преобразуемъ въ $\sqrt[6]{27}$ и $\sqrt[6]{4}$; тогда

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{27 \times 4} = \sqrt[6]{108};$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\frac{27}{4}} = \sqrt[6]{6{,}75}$$

271. Теорема VI.—*Корень величины своей неизмѣнитъ, если его показателя раздѣлить на одного изъ его дѣлителей* n *и извлечь* n-*вый корень изъ подкореннаго числа.*

Возьмемъ $\sqrt[m]{a}$ и пусть n будетъ дѣлителемъ для m. Но $m = \frac{m}{n} \times n$, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[\frac{m}{n}]{a}} = \sqrt[m]{a}.$$

Примѣчаніе.—Эта теорема позволяетъ упрощать коренныя выраженія въ томъ случаѣ, когда подкоренное число будетъ степень, показатель которой будетъ дѣлителемъ показателя корня.

Возьмемъ, напримѣръ, корень $\sqrt[6]{27}$. Но 27 есть третья степень 3 и показатель корня 6 есть произведеніе 3 на 2, тогда

$$\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$$

Извлеченіе съ даннымъ приближеніемъ квадратнаго корня изъ несоизмѣримаго числа.

272. Предложенныя нами правила (§ § 226 и 234), для извлеченія квадратнаго корня изъ цѣлаго или дробнаго числа, приложимы также и къ числамъ несоизмѣримымъ. Разсужденія, которыя мы употребляли, могутъ быть дѣйствительно слово въ слово повторены и для чиселъ неизмѣримыхъ. Такимъ образомъ,

Чтобы извлечь съ точностію до одной единицы квадратный корень изъ несоизмѣримаго числа N, должно вычислить N съ точностію до одной единицы съ недостаткомъ и извлечь квадратный корень изъ полученнаго числа съ точностію до одной единицы.

Чтобы извлечь съ точностію до $\frac{1}{n}$ *квадратный корень изъ несоизмѣримаго числа N, должно вычислить съ точностію до одной единицы съ недостаткомъ произведеніе* Nn^2, *изъ полученнаго цѣлаго извлечь квадратный корень съ точностію до одной единицы и полученный результатъ раздѣлить на* n.

Или, для частнаго случая:

Чтобы извлечь квадратный корень изъ несоизмѣримаго числа N, съ точностію до $\frac{1}{10^n}$; *должно вычислить N съ точностію до* $\frac{1}{10^{2n}}$ *съ недостаткомъ, т. е. съ* 2n *десятичными, отбросить потомъ запятую, извлечь изъ полученнаго цѣлаго квадратный корень съ точностію до единицы и отдѣлить справа въ результатѣ* n *десятичныхъ знаковъ.*

Примѣръ. — Требуется извлечь квадратный корень изъ $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ съ точностію до 0,001.

А такъ какъ

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = 2{,}5 + \sqrt{1{,}25},$$

то прежде должно вычислить $\sqrt{1{,}25}$ съ точностію до $\frac{1}{10^6}$; въ результатѣ получимъ 1,118033. Поэтому $\frac{5+\sqrt{5}}{2} = 3{,}618033$ съ точностію до $\frac{1}{10^6}$ и съ недостаткомъ.

Послѣ того останется извлечь съ точностію до одной единицы квадратный корень изъ 3618033; въ результатѣ получится 1902. Поэтому, съ точностію до 0,001 и съ недостаткомъ

$$\sqrt{\frac{5\times\sqrt{5}}{2}} = 1{,}902.$$

Сокращенный способъ извлеченія квадратнаго корня изъ числа дробнаго, или несоизмѣримаго.

273. Предъидущія правила съ удобствомъ могутъ быть значительно упрощены. Упрощеніе это вытекаетъ изъ слѣдующей теоремы:

Теорема — *Если N выражаетъ собою какое нибудь число, цѣлая часть котораго состоитъ изъ 2k или изъ 2k—4 цифръ, и A пусть будетъ цѣлое полученное отъ замѣны нулями k—1 послѣднихъ цифръ этой цѣлой части, то величина* $\sqrt{N}$ *найдется съ точностію до одной единицы (съ недостаткомъ или съ избыткомъ смотря по случаю), принимая для нея величину* $\sqrt{A}$ *съ точностію до одной единицы.*

Пусть a будетъ цѣлая часть $\sqrt{A}$ и R остатокъ получаемый отъ извлеченія; тогда

$$A = a^2 + R.$$

Также, пусть B будетъ избытокъ N надъ A, а потому $N = A + B$, тогда

$$N = a^2 + R + B.$$

Число A состоитъ изъ $2k$ или $2k-1$ цифръ, a состоитъ изъ k цифръ. Цѣлая часть B будетъ состоять изъ $k-1$ послѣднихъ цифръ цѣлой части N, то очевидно, что $B<a$; однакожъ остатокъ R не можетъ превышать $2a$; поэтому $R+B$ будетъ менѣе $3a$ и еще менѣе $4a+4$. Слѣдовательно равенство $N = a^2 + R + B$ даетъ

$$N>a^2 \text{ и } N<a^2+4a+4 \text{ или } <(a+2)^2.$$

Изъ этаго видно, что N заключается между a^2 и $(a+1)^2$, или между $(a+1)^2$ и $(a+2)^2$, а потому $a+1$ есть величина $\sqrt{N}$, съ точностію до одной единицы, съ недостаткомъ или съ избыткомъ.

Примѣчаніе.—Если остатокъ R не превышаетъ a, то a есть величина $\sqrt{N}$ съ точностію до одной единицы съ недостаткомъ, и $a+1$ таже величина, но съ избыткомъ.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, $R+B$ менѣе $2a$, а значитъ еще менѣе $2a+1$, слѣдовательно изъ равенства $N=a^2+R+B$ видно, что

$$N>a^2 \text{ и } N<a^2+2a+1, \text{ или } <(a+1)^2$$

т. е. что a есть цѣлая часть $\sqrt{N}$.

274. Правила §§ 226, 234 и 272 приводятъ извлеченіе квадратнаго корня изъ какого нибудь числа съ даннымъ приближеніемъ къ извлеченію квадратнаго корня изъ цѣлаго, съ точностію до оной единицы. Такимъ образомъ, въ нихъ требуется вычислить это цѣлое и, по предъидущей теоремѣ, очевидно, что это вычисленіе можно прекращать, какъ только будетъ получено болѣе половины цифръ, ибо остальныя, которыя знать безполезно, можно замѣнить нулями.

Правила § 272 послѣ этого можно изложить такъ:

Чтобы извлечь съ точностію до одной единицы квадратный корень изъ какого нибудь числа N, дробнаго или несоизмѣримаго, достаточно: 1⁰. *вычислить* $k+1$ *или* k *первыхъ цифръ цѣлой части N, смотря потому, имѣетъ ли эта цѣлая часть* 2k *или* 2k—1 *цифръ*; 2⁰. *приписать* k—1 *нулей справа къ полученнымъ цифрамъ*; 3⁰ *извлечь, съ точностію до единицы съ избыткомъ, квадратный корень изъ полученнаго такимъ образомъ цѣлаго.*

Чтобы извлечь съ точностію до $\frac{1}{n}$*-квадратный корень изъ какого нибудь числа N дробнаго или не соизмѣримаго, вычисляютъ* $\sqrt{Nn^2}$ *съ точностію до одной единицы по предъидущему правилу и результатъ дѣлятъ на* n.

275. Это послѣднее правило обнимаетъ собою всѣ случаи, какія только могутъ представиться. Слѣдующія же два правила, для вычисленія квадратнаго корня изъ какого нибудь числа большаго чѣмъ 1, или меньшаго чѣмъ 1, съ точностію до $\frac{1}{10_n}$, выводятся уже непосредственно.

Чтобы извлечь съ точностію до $\frac{1}{10^n}$ *квадратный корень изъ какого нибудь числа дробнаго или несоизмѣримаго* $N>1$ *должно*: 1⁰. *вычислить N въ десятичныхъ и прекратить вычисленіе тогда когда получится* $n+k+1$ *или* $n+k$ *цифръ, смотря пото-*

му, будетъ ли цѣлая часть N имѣть 2k *или* 2k — 1 *цифръ:* 2^0. *отбросить запятую;* 3^0 *приписать* n + k — 1 *нулей справа къ полученнымъ цифрамъ;* 4^0 *извлечь, съ точностію до одной единицы съ избыткомъ, квадратный корень изъ образовавшагося такимъ образомъ числа;* 5^0. *Отдѣлить потомъ въ результатѣ* n *десятичныхъ знаковъ.*

Чтобы вычислить съ точностію до $\frac{1}{10^n}$ *квадратный корень изъ какого нибудь дробнаго или не соизмѣримаго числа* $N < 1$ *должно* 1^0. *вычислить N въ десятичныхъ и смотря потому будетъ ли первая значущая цифра составлять порядокъ* 2k + 1 *или* 2k + 2, *вычисляютъ всего* n — k + 1 *или* n — k *цифръ;* 2^0 *отбросить запятую;* 3^0 *приписать* n — k—1 *нулей справа къ полученнымъ цифрамъ;* 4^0 *извлечь съ точностію до одной единицы съ избыткомъ квадратный корень изъ полученнаго такимъ образомъ цѣлаго; и* 5^0 *отдѣлить справа въ результатѣ* n *десятичныхъ знаковъ.*

Первый примѣръ.—Требуется найти квадратный корень съ точностію до 0,001 изъ $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Имѣемъ

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} = 2,5 + \sqrt{1,25}.$$

Цѣлая часть этаго числа въ одну цифру, а потому должно вычислить ее въ трехъ десятичныхъ и получимъ

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} = 3,618 \text{ съ точностію до } 0,001,$$

Квадратный корень изъ 3618000 съ избыткомъ и съ точностію до одной единицы есть 1903; слѣдовательно

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 1,903 \text{ съ точностію до } 0,001.$$

Второй примѣръ.—Требуется вычислить квадратный корень съ точностію до 0,001 изъ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$. Имѣемъ

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,5 - \sqrt{0,125}$$

Это число менѣе 1 и болѣе 0, поэтому его должно вычислить съ четырьмя десятичными; получимъ

$\sqrt{0,125} = 0,3537$ съ точностію до 0,0001 съ избыткомъ, и

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,1463$ съ точностію до 0,0001 съ недостаткомъ.

Квадратный корень изъ 146300 съ точностію до одной единицы съ избыткомъ есть 383; слѣдовательно

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = 0,383 \text{ съ точностію до } 0,001.$$

276. Теорема § 273 сверхъ того даетъ непосредственное рѣшеніе слѣдующаго вопроса:

Зная величину какого нибудь числа N, выражаемую какимъ нибудь десятичнымъ числомъ A, съ точностію до одной единицы порядка послѣдней цифры числа A съ недостаткомъ, требуется опредѣлить съ какимъ приближеніемъ можно вычислить $\sqrt{N}$ въ десятичныхъ знакахъ.

Пусть n будетъ число всѣхъ цифръ въ A; приписываемъ $n-2$ нулей справа къ A, а если число десятичныхъ будетъ тогда нечетное, то приписываемъ однимъ нулемъ болѣе. Пусть тогда $2k$ будетъ число десятичныхъ въ числѣ A, и A′ будетъ цѣлое число полученное чрезъ опущеніе запятой. $\sqrt{N}$ съ точностію до $\frac{1}{10^k}$ можно получить извлекая съ точностію до одной единицы съ избыткомъ квадратный корень изъ A′ отдѣливъ въ результатѣ k десятичныхъ цифръ.

Примѣръ.—Число N имѣетъ приближенную величину 3,141 съ точностію до 0,001 съ недостаткомъ; требуется узнать, съ какимъ приближеніемъ можно вычислить $\sqrt{N}$.

Если справа къ данному числу припишемъ три нуля, то получимъ 3,141000 и какъ число десятичныхъ будетъ тогда равно 6; то $\sqrt{N}$ можно вычислить съ точностію до $\frac{1}{10^3}$ извлекая $\sqrt{3141000}$ съ точностію до одной единицы съ избыткомъ и отдѣливъ въ результатѣ справа три десятичныхъ.

Сокращенный способъ извлеченія квадратнаго корня изъ цѣлаго числа.

277. Всѣ случаи при извлеченіи квадратнаго корня, какъ мы видѣли, сводятся на извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлаго числа. Это послѣднее вычисленіе можетъ быть произведено способомъ болѣе ускореннымъ, чѣмъ изложенный въ § 230. Въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ теорему:

Теорема.—*Когда опредѣлено болье половины цифръ квадратнаго корня изъ цѣлаго числа, тогда остальныя цифры можно получить однимъ дѣленіемъ.*

Пусть N цѣлое число. Положимъ, что цѣлая часть $\sqrt{N}$ содержитъ $2n+1$ или больше цифръ и, что первыя изъ нихъ уже опредѣлены обыкновеннымъ или какимъ нибудь другимъ способомъ, такъ что осталось опредѣлить не болѣе n цифръ. Пусть a будетъ число состоящее изъ найденныхъ цифръ $\sqrt{N}$ сопровождаемое n нулями и x вообще число несоизмѣримое, которое должно прибавить къ a, чтобы получить точную величину $\sqrt{N}$. Имѣемъ.

$$N=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2;$$

поэтому

$$2ax+x^2=N-a^2.$$

Число a по предположенію найдено, значитъ разность $N-a^2$ будетъ извѣстна, назовемъ ее чрезъ R Тогда

$$2ax+x^2=R$$

дѣля на $2a$ получимъ

$$x+\frac{x^2}{2a}=\frac{R}{2a},$$

или

$$x=\frac{R}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Обозначимъ чрезъ q частное, чрезъ r остатокъ отъ дѣленія R на $2a$, тогда предъидущее равенство обратится въ

$$x=q+\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}\ldots\ldots\ (1)$$

Такъ какъ въ цѣлой части x должно быть не болѣе n цифръ, то x менѣе 10^n, слѣдовательно x^2 менѣе 10^{2n}; но, по предположенію, a состоитъ менѣе чѣмъ изъ $2n+1$ цифръ, стало быть $a \times 2$ будетъ болѣе чѣмъ 10^{2n}. Изъ этого заключаемъ что дробь $\frac{x^2}{2a}$ менѣе единицы; тоже самое очевидно примѣнимо и къ дроби $\frac{r}{2a}$, слѣдовательно ошибка происходящая отъ принятія.

$$x=q,$$

если она и будетъ существовать, то все-таки будетъ менѣе единицы.

Если x будетъ $> q$, то равенство (1) показываетъ, что $r > x^2$, а тѣмъ болѣе $r > q^2$;

Если x будетъ $= q$, то равенство (1) показываетъ, что $r=x^2$, а слѣдовательно и $r=q^2$.

Если x будетъ $< q$, то равенство (1) показываетъ, что $r < x^2$, а тѣмъ болѣе $r < q^2$.

Изъ этого слѣдуетъ:

1°. Если $r > q^2$, $a+q$ будетъ величина $\sqrt{N}$ съ точностію до одной единицы съ недостаткомъ.

2°. Если $r = q^2$, то $a+q$ будетъ величина точная $\sqrt{N}$.

3°. Если $r < q^2$, то $a+q$ будетъ величина $\sqrt{N}$ съ точностію до одной единицы съ избыткомъ; слѣдовательно $a+q-1$ будетъ величина съ точностію до одной единицы съ недостаткомъ.

278. Легко можно найти какъ въ первомъ, такъ и во второмъ случаѣ избытокъ N надъ наибольшимъ цѣлымъ квадратомъ въ немъ заключающимся. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$N-a^2=2aq+r,$$

или

$$N = a^2+2aq+r. \ldots.(2).$$

Послѣ того, предположимъ предварительно, что $r > q^2$. Наибольшій цѣлый квадратъ заключающійся въ N есть $(a+q)^2$ и будетъ

$$(a+q)^2=a^2+2aq+q^2,$$

вычитая это равенство изъ равенства (2), получимъ

$$N-(a+q)^2=r-q.$$

Предположимъ теперь второе, что $r<q^2$. Наибольшій цѣлый квадратъ заключающійся въ N есть $a+q-1$ и тогда

$$(a+q-1)^2=(a+q)^2-2(a+q)+1,$$
$$=a^2+2aq+q^2-2(a+q)+1.$$

Вычитая это равенство изъ равенства (1) получимъ

$$N-(a+q-1)^2=2(a+q)-(q^2-r-1).$$

279. Основываясь на предъидущемъ, при извлеченіи квадратнаго корня изъ цѣлаго N, имѣющаго большое число цифръ, опредѣляютъ три первыя цифры корня обыкновеннымъ способомъ, а двѣ слѣдующія цифры опредѣляютъ сокращеннымъ способомъ. Когда будутъ извѣстны пять цифръ, то сокращенный способъ даетъ возможность опредѣлить еще четыре цифры и т. д.

Примѣръ.—Требуется извлечь $\sqrt{3}$ съ восемью десятичными знаками. Для этого должно извлечь квадратный корень изъ 3×10^{16} съ точностію до одной единицы. Опредѣлимъ три первыхъ цифры этого корня.

3	173	
200	27	343
1100		
71		

Сдѣлавъ $N=300000000$, $a=17300$, имѣемъ:

$$N-a^2=710000.$$

Раздѣлимъ 710000 на $2\times17300=34600$,

710000	34600
18000	20

получимъ

$$q=20 \text{ и } r=18000,$$

тогда

$$q^2=400 \text{ и } r-q^2=17600;$$

поэтому 17320 есть квадратный корень изъ N съ точностію до одной единицы съ недостаткомъ; а избытокъ N надъ квадратомъ 17320 есть 17600.

Сдѣлавъ N=30000000000000000, a=173200000, имѣемъ:

$$N-a^2=1760000000000.$$

Раздѣлимъ это число на $2\times173200000=346400000$,

1760000000000	3464000000
28000000000	5080
288000000	

имѣемъ еще

$$q=5080 \text{ и } r=288000000,$$

тогда

$$q^2=25806400 \text{ и } r-q^2=262193600;$$

поэтому 173205080 есть величина $\sqrt{3\times10^{16}}$ съ точностію до одной единицы съ недостаткомъ и остаткомъ отъ обыкновеннаго дѣйствія будетъ 262193600. Слѣдовательно получимъ съ точностію до $\frac{1}{10^8}$

$$\sqrt{3}=1,73205080$$

Извлеченіе кубичнаго корня въ данномъ приближеніи изъ несоизмѣримаго числа.

280. Правила данныя нами для извлеченія кубичнаго корня изъ цѣлаго или дробнаго числа приложимы также и къ числамъ несоизмѣримымъ. Въ самомъ дѣлѣ, истины, на которыхъ онѣ основывались, могутъ быть слово въ слово повторены и для несоизмѣримыхъ чиселъ.

Чтобы извлечь съ точностію до одной единицы кубичный корень изъ несоизмѣримаго числа N, должно N вычислить съ точ-

ностію до одной единицы съ недостаткомъ и извлечь кубичный корень изъ полученнаго такимъ образомъ цѣлаго числа, съ точностію до одной единицы.

Чтобы извлечь съ точностію до $\frac{1}{N}$ *кубичный корень изъ несоизмѣримаго числа* N, *должно вычислить съ точностію до единицы съ недостаткомъ произведеніе* $N n^3$; *изъ цѣлаго числа полученнаго такимъ образомъ извлечь кубичный корень съ точностію до одной единицы и результатъ раздѣлить на* n.

А въ частомъ случаѣ,

Чтобы извлечь кубичный корень съ точностію до $\frac{1}{10^n}$ *изъ несоизмѣримаго числа* N, *должно* N *вычислить съ точностію до* $\frac{1}{10^{3n}}$ *съ недостаткомъ; отбросить потомъ запятую, извлечь кубичный корень съ точностію до одной единицы изъ полученнаго цѣлаго и въ результатѣ справа отдѣлить* n *десятичныхъ цифръ.*

281. Предъидущія правила, также какъ и подобныя правила для извлеченія квадратнаго корня, способны къ практическому упрощенію, но это упрощеніе менѣе важно, ибо извлеченіе кубичнаго корня производится почти всегда помощью логариѳмовъ, что и будетъ нами изложено въ теоріи послѣднихъ.

Извлеченіе корней, показатели которыхъ состоятъ только изъ множителей 2 и 3.

282. Извлеченіе корня, показатель котораго состоитъ только изъ множителей 2 и 3, непосредственно сводится на извлеченіе корней квадратныхъ и кубичныхъ.

Корни четвертой, восьмой и т. д.—1°. Пусть дано извлечь съ точностію до $\frac{1}{n}$ корень четвертой степени изъ числа N.

По (§ 268) имѣемъ:

$$\sqrt[4]{N} = \sqrt{\sqrt{N}}.$$

Значитъ, должно извлечь квадратный корень изъ $\sqrt{N}$ съ точностію до $\frac{1}{n}$. Правила § 272, или таковыя же § 274,

дают рѣшеніе этого вопроса, потому что они указываютъ на то приближеніе, съ какимъ должно вычислить $\sqrt{N}$, чтобы потомъ извлечь $\sqrt{\sqrt{N}}$ съ точностію до $\frac{1}{n}$.

2. Пусть дано извлечь корень восьмой степени изъ числа N съ точностію до $\frac{1}{n}$.

Имѣемъ по (§ 268)

$$\sqrt[8]{N} = \sqrt{\sqrt[4]{N}}$$

Значитъ должно извлечь квадратный корень изъ $\sqrt[4]{N}$ съ точностію до $\frac{1}{n}$. Правила § 272, а также 274 укажутъ на то приближеніе, съ которымъ нужно вычислить $\sqrt[4]{N}$; это вычисленіе дѣлается такъ, какъ мы сейчасъ указали.

Изъ этого видно, что извлеченіе всѣхъ корней, имѣющихъ показателями какую нибудь степень 2, приводится къ извлеченію квадратнаго корня.

283. *Корни шестой, двѣнадцатой и проч.* 1°. Пусть дано извлечь съ точностію до $\frac{1}{n}$ корень шестой степени изъ числа N. Имѣемъ:

$$\sqrt[6]{N} = \sqrt[3]{\sqrt{N}}$$

Значитъ, для этого должно извлечь кубичный корень изъ $\sqrt{N}$ съ точностію до $\frac{1}{n}$. Правила §§ 272 и 289 дадутъ рѣшеніе этого вопроса.

2°. Пусть дано извлечь корень двѣнадцатой степени изъ числа N, съ точностію до $\frac{1}{n}$.

Имѣемъ:

$$\sqrt[12]{N} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{N}}$$

Значитъ должно извлечь съ точностію до $\frac{1}{n}$ кубичный корень изъ $\sqrt[4]{N}$. Правила §§ 272 и 280 даютъ рѣшеніе этого вопроса.

Вообще же видно, что правила § 272 и § 280 даютъ средства извлекать всякій корень съ даннымъ приближеніемъ, лишь бы его показатель состоялъ только изъ множителей 2 и 3.

Упражненія.

1. Доказать равенство

$$\sqrt{3+\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}.$$

2. Доказать равенство

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3.$$

3 Вычислить съ точностію до 0,0001 два корня

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

4. Доказать слѣдующую теорему: Если N означаетъ какое нибудь число, цѣлая часть котораго состоитъ изъ $3k$, $3k-1$, или $3k-2$ цифръ и если A будетъ цѣлое, полученное чрезъ замѣну нулями $2k-3$ цыфръ въ этой цѣлой части, то величина $\sqrt[3]{N}$ съ точностію до одной единицы (съ недостаткомъ или съ избыткомъ смотря по случаю), получится, принимая для нея величину $\sqrt[3]{A}$ съ точностію до одной единицы съ избыткомъ.

Вывести изъ этой теоремы сокращенный способъ для извлеченія кубичнаго корня изъ числа дробнаго и несоизмѣримаго.

5. Зная величину какого-нибудь числа N выражаемую десятичнымъ числомъ A съ точностію до одной единицы порядка послѣдней цифры числа A съ недостаткомъ, спрашивается, съ какимъ приближеніемъ должно вычислить $\sqrt[3]{N}$ въ десятичныхъ знакахъ.

6. Доказать слѣдующую теорему: если N означаетъ цѣлое число, кубичный корень котораго имѣетъ менѣе $2n+2$ цифръ и кромѣ того, если A означаетъ число составленное изъ $n+2$ первыхъ цифръ $\sqrt[3]{N}$, сопровождаемыхъ n нулями и q цѣлое частное отъ дѣленія $N-a^3$ на $3a^2$, то будетъ

$$\sqrt[3]{N} = a + q$$

точный, или приближенный съ точностію до одной единицы.

ГЛАВА IV.

ТЕОРІЯ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ПРИБЛИЖЕНІЙ.

Цѣль теоріи приближеній.—Сложеніе.—Вычитаніе.—Сокращенный способъ Ухтредта для перемноженія двухъ чиселъ цѣлыхъ или десятичныхъ.—Вычисленіе съ даннымъ приближеніемъ произведенія двухъ чиселъ, которыя могутъ быть вычислены съ произвольнымъ приближеніемъ.—Вычисленіе произведенія двухъ чиселъ, когда только ихъ приближенныя величины извѣстны.—Произведенія нѣсколькихъ чиселъ и степеней.—Сокращенный способъ Гюи для вычисленія, съ точностію до одной единицы, частнаго двухъ цѣлыхъ чиселъ.—Распространеніе способа Гюи на десятичныя числа.—Вычисленіе съ даннымъ приближеніемъ частнаго двухъ чиселъ, которыя могутъ быть вычислены съ произвольнымъ приближеніемъ.—Вычисленіе частнаго двухъ чиселъ, когда только ихъ приближенныя величины извѣстны.

Цѣль теоріи приближеній.

284. Правила вычисленія цѣлыхъ и десятичныхъ чиселъ, изложенныя прежде, даютъ средство находить точный результатъ какого нибудь производящагося надъ ними дѣйствія. Но, весьма часто, требуется знать только приближенную величину результата; тогда должно употреблять способы болѣе скорыя, которые мы изложимъ въ подробности.

Эти сокращенные способы, полезныя для точнаго вычисленія данныхъ цѣлыхъ и десятичныхъ чиселъ, необходимы для полученія результата какого нибудь дѣйствія производимаго надъ числами выведенными изъ опытовъ и наблюденій, всегда неизбѣжно сопровождаемыхъ ошибками.

Несоизмѣримое число, будучи предѣломъ своихъ приближенныхъ величинъ, съ точностями до 0,1, до 0,01 до 0,001 и т. д., можетъ быть разсматриваемо, какъ число десятичное съ неограниченнымъ числомъ цифръ. Такимъ образомъ

правила, которыя будутъ нами указаны, будутъ приложимы ко всѣмъ случаямъ, и дадутъ рѣшеніе слѣдующихъ двухъ вопросовъ, заключающихъ въ себѣ всю теорію приближеній.

1°. *Если дано нѣсколько чиселъ способныхъ быть вычисленными съ точностію до одной единицы какого бы то ни было порядка, то съ какимъ приближеніемъ должно вычислить каждое изъ нихъ, чтобы отъ дѣйствія производимаго надъ этими числами, получить результатъ съ точностію до одной единицы опредѣленнаго порядка?*

2°. *Съ какимъ приближеніемъ можно получить результатъ отъ какого нибудь дѣйствія надъ числами, которыхъ только приближенныя величины извѣстны?*

285. Всѣ случаи встрѣчающіяся при извлеченіи квадратныхъ и кубичныхъ корней были нами изложены въ предъидущей главѣ, поэтому мы теперь ограничимся основными четырьмя дѣйствіями: сложеніемъ, вычитаніемъ, умноженіемъ и дѣленіемъ. Но прежде чѣмъ приступимъ къ этому, сдѣлаемъ весьма важное замѣчаніе.

Пусть дано десятичное число N, состоящее изъ ограниченнаго или неограниченнаго числа цифръ, и если мы отбросимъ всѣ десятичныя, которыя слѣдуютъ за $n^{\text{вою}}$ цифрою, то десятичное число A, полученное нами, будетъ величиною N точною до $\frac{1}{10^n}$ съ недостаткомъ, а величину B для N, точную до $\frac{1}{10^n}$ съ избыткомъ, мы получимъ, увеличивъ единицею послѣднюю цифру A. Одно изъ чиселъ A и B будетъ приближенной величиной N съ точностію до одной полу-единицы $n^{\text{ваго}}$ десятичнаго порядка;—очевидно это будетъ A, если $(n+1)^{\text{ая}}$ десятичная въ N есть 4 или цифра меньшая, и B, если $(n+1)^{\text{ая}}$ десятичная въ N есть 5 или цифра бо̀льшая. То изъ чиселъ A и B, которое рознится отъ N менѣе чѣмъ на полу-единицу $n^{\text{ваго}}$ десятичнаго порядка, обыкновенно называется величиною N съ n десятичными знаками. Такъ, напримѣръ, когда говорятъ о числахъ вычисленныхъ въ семи десятичныхъ, должно предполагать, что эти числа ошибочны менѣе чѣмъ на одну полу-единицу седьмаго десятичнаго порядка. Поэтому для вычисленія числа въ семи десятичныхъ знакахъ, необходимо знать, будетъ ли его восьмая десятичная болѣе или менѣе 4, т. е.

должно вычислить предложенное число съ точностію до $\frac{1}{108}$, а иногда, даже и еще съ бо̀льшимъ приближеніемъ *).

Сложеніе.

286. *Чтобы получить сумму нѣсколькихъ чиселъ цѣлыхъ или десятичныхъ, съ точностію до одной единицы извѣстнаго порядка, должно:*

1°. *Если дано не болѣе десяти чиселъ, подлежащихъ сложенію, то каждое изъ нихъ вычислить съ точностію до одной единицы, въ десять разъ меньшей требуемаго приближенія, съ недостаткомъ; потомъ составить сумму приближенныхъ чиселъ, отбросить послѣднюю цифру результата, увеличивъ единицею цифру предпослѣднюю.*

2°. *Если же будетъ болѣе десяти но менѣе ста слагаемыхъ чиселъ, то каждое изъ нихъ вычислить съ точностію до одной единицы, меньшей во сто разъ требуемой степени приближенія, съ недостаткомъ; потомъ составить сумму приближенныхъ чиселъ; отбросить послѣднюю правую цифру результата, увеличивъ единицею цифру предпослѣднюю.*

И. т. д.

Возьмемъ для примѣра шесть чиселъ: 3,14159, 9,8696, 3,183, 34,557519, 13,011, 31,7734, и предположимъ, что требуется получить сумму съ точностію до 0,01, По предположенному правилу, въ данныхъ числахъ должно сохранить только по три десятичныхъ и дѣйствіе располагаютъ такъ:

3,141
9,869
3,183
34,557
13,011
31,773

95,534.

*) *Примѣръ.*—Положимъ, что N=0,23736, тогда для этого числа *A*=0,237, *B*=0,238. Принимая же *A*=0,237, мы отбрасываемъ въ N 0,00036, величину меньшую чѣмъ половина 0,001, а принимая *B*=0,238, мы прибавляемъ къ N 0,00064 величину большую половины 0,001. Стало быть приближенная величина N будетъ *A*. Возмемъ теперь N=0,23766, величина *A*=0,237, *B*=0,238 и, основываясь на предъидущемъ, увидимъ, что приближенная величина N въ этомъ случаѣ будетъ B. (Прим. перев.)

Отбрасывая послѣднюю цифру результата и увеличивая единицею цифру предпослѣднюю, получимъ число 95,54, которое и будетъ суммою предложенныхъ чиселъ, съ точностію до 0,01 съ недостаткомъ или съ избыткомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, ошибка, допускаемая въ каждомъ изъ чиселъ, менѣе 0,001, всѣхъ же чиселъ менѣе десяти, слѣдовательно сумма ошибокъ будетъ менѣе $0{,}001 \times 10$, или менѣе 0,01. Поэтому сумма данныхъ чиселъ будетъ заключаться между 95,534 и $95{,}534 + 0{,}01 = 95{,}544$. Или, разсматривая точнѣе, эта сумма будетъ заключаться между 95,53 и 95,55 т. е. или между 95,53 и 95,54, или, лучше, между 95,54 и 95,55. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ 95,54 будетъ величиною искомой суммы, съ точностію до 0,01 съ недостаткомъ или съ избыткомъ.

Такъ какъ это разсужденіе очевидно общее, то предложенное правило можетъ считаться доказаннымъ.

Примѣчаніе.—Если одна изъ отбрасываемыхъ цифръ по предъидущему правилу выражаетъ единицу порядка высшаго чѣмъ простыя единицы, то должно на ея мѣсто поставить нуль.

287. Слѣдующія правила выводятъ непосредственно:

1°. *Чтобы получить съ точностію до одной единицы извѣстнаго порядка, сумму нѣсколькихъ соизмѣримыхъ или несоизмѣримыхъ чиселъ, предварительно неизвѣстныхъ, но которыя можно вычислить съ точностію до одной единицы какого нибудь порядка; должно каждое изъ нихъ вычислить съ точностію до одной единицы, въ десять, во сто и т. д. разъ меньшей требуемой степени приближенія, смотря по случаю, съ недостаткомъ, и къ полученнымъ числамъ приложить правило* § 286.

2°. *Чтобы получить съ возможно-наибольшимъ приближеніемъ сумму нѣсколькихъ чиселъ, которыхъ только приближенныя величины съ недостаткомъ извѣстны, должно: въ каждомъ изъ этихъ чиселъ отбросить всѣ цифры, выражающія собою единицы порядковъ меньшихъ чѣмъ порядокъ выражающій степень приближенія, съ какимъ вычислено одно изъ этихъ чиселъ; потомъ должно произвести сложеніе, откинуть одну, двѣ и т. д. изъ послѣднихъ правыхъ цифръ результата, смотря по случаю, и увеличить единицею послѣднюю сохраняемую цифру. Тогда полученный результатъ будетъ приближеннымъ, съ точностію до одной единицы порядка послѣдней цифры.*

Вычитаніе.

288. *Чтобы получить разность двухъ цѣлыхъ или десятичныхъ чиселъ, съ точностію до одной единицы извѣстнаго порядка, вычисляютъ эти числа, или оба съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ, съ точностію до одной единицы этого порядка и потомъ находятъ разность полученныхъ приближенныхъ чиселъ.*

Возьмемъ, напримѣръ, два числа

9,8696, 3,141592

и предположимъ, что требуется вычислить ихъ разность съ точностію до 0,001. По изложенному правилу должно сохранить по три десятичныхъ въ каждомъ изъ данныхъ чиселъ и дѣйствіе располагаютъ такъ:

$$\begin{array}{r} 9{,}869 \\ 3{,}141 \\ \hline 6{,}728. \end{array}$$

Найденный результатъ 6,728 есть разность предложенныхъ чиселъ, съ точностію до 0,001, съ недостаткомъ или съ избыткомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы имѣть точную разность данныхъ чиселъ достаточно было бы увеличить или уменьшить 6,728 разностію количествъ, на которыя измѣнены данныя числа; но, какъ разность измѣненій менѣе чѣмъ 0,001, то поэтому и ошибка въ разности будетъ такова же. Слѣдовательно 6,728 разнится отъ точнаго результата менѣе чѣмъ на 0,001.

289. Изъ этого непосредственно выводимъ слѣдующее:

1°. *Чтобы найти, съ точностію до одной единицы извѣстнаго порядка, разность двухъ соизмѣримыхъ или не соизмѣримыхъ чиселъ, хотя предварительно и неизвѣстныхъ, но которыя можно вычислить съ точностію до одной единицы какого-нибудь порядка; должно вычислить эти числа оба съ недостаткомъ или оба съ избыткомъ и съ точностію до одной единицы порядка, выражающаго собою степень требуемаго приближенія и взять разность результатовъ.*

2°. *Чтобы получить съ возможно большимъ приближеніемъ съ недостаткомъ или съ избыткомъ разность двухъ чиселъ, которыхъ*

извѣстны только приближенныя величины, должно въ одномъ изъ этихъ чиселъ отбросить цифры, представляющія единицы порядковъ меньшихъ чѣмъ единица выражающая степень приближенія, съ какимъ вычислено другое число, и потомъ сдѣлать вычитаніе. Результатъ будетъ приближенный, съ точностію до одной единицы порядка его послѣдней цифры.

Сокращенный способъ Ухтредта для перемноженія двухъ цѣлыхъ или десятичныхъ чиселъ.

290. Ухтредтъ, въ своемъ сочиненіи „*Artis analyticae praxis*“, изложилъ замѣчательный по простотѣ способъ для вычисленія, съ даннымъ приближеніемъ, произведенія двухъ цѣлыхъ или десятичныхъ чиселъ. Этотъ способъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Чтобы получить, съ точностію до одной единицы извѣстнаго порядка, произведеніе двухъ цѣлыхъ или десятичныхъ чиселъ, пишутъ цифру единицъ множителя подъ цифрою множимаго, представляющей собой единицы въ десять разъ меньшія той, которой выражена требуемая степень приближенія. Затѣмъ прочія цифры множителя, отъ написанной, располагаютъ въ обратномъ порядкѣ, т. е. десятки, сотни и т. д. по правую руку отъ единицъ, а десятыя, сотыя и т. д. по лѣвую руку отъ единицъ. Потомъ множимое умножаютъ на каждую значущую цифру множителя, начиная каждое умноженіе съ той цифры множимаго, которая стоитъ надъ умножающею цифрою множителя. Всѣ эти отдѣльныя произведенія пишутъ одно подъ другимъ такъ, чтобы послѣдняя правая цифра каждаго изъ нихъ находилась въ одномъ вертикальномъ ряду; послѣ чего ихъ складываютъ. Въ суммѣ послѣднюю правую цифру отбрасываютъ и увеличиваютъ единицею предшествующую цифру. Если единица выражающая требуемую степень приближенія есть единица цѣлая, то полученный результатъ будетъ искомымъ произведеніемъ, если же единица выражающая требуемую степень приближенія есть единица $n^{\text{ваго}}$ *порядка, или* $n^{\text{ваго}}$ *десятичнаго порядка, то должно, или приписать* n *нулей справа къ полученному результату, или отдѣлить справа въ результатѣ* n *десятичныхъ цифръ.*

При указанномъ расположеніи множимаго и множителя можетъ случиться, что извѣстныя цифры множителя не будутъ имѣть надъ собой, справа или слѣва, цифръ множимаго. Въ первомъ случаѣ, справа къ множимому приписываютъ столько нулей, сколько ихъ будетъ нужно, чтобы начать дѣйствіе. Во второмъ случаѣ, не принимаютъ въ расчетъ тѣхъ цифръ множителя надъ которыми нѣтъ надписанныхъ цифръ множимаго.

Для того чтобы предшествующее правило было точно, необходимо: въ томъ случаѣ, когда всѣ цифры множителя будутъ въ употребленіи, чтобы сумма этихъ цифръ не превышала 10; а въ томъ случаѣ, когда не всѣ цифры множителя будутъ въ употребленіи, то, чтобы сумма употребляемыхъ цифръ, увеличенная послѣднею лѣвою цифрою множимаго и единицею, не превышала бы 10. Если же сумма, о которой мы говоримъ, будетъ превышать 10, то правило подлежитъ слѣдующимъ двумъ измѣненіямъ.

1⁰. *Цифра единицъ множителя должна быть подписана подъ цифрою множимаго, представляющею единицы во сто разъ меньшія той, которою выражена степень требуемаго приближенія.*

2⁰. *Въ суммѣ отдѣльныхъ произведеній множимаго на цифры множителя, составленной по предложенному правилу, всѣ послѣднія правыя цифры должны быть отброшены, а предъидущая имъ цифра увеличена единицею.*

Для того, чтобы измѣненное такимъ образомъ правило было точно, должно, въ томъ случаѣ, когда всѣ цифры множителя будутъ въ употребленіи, чтобы сумма этихъ цифръ не превышала 100; а въ случаѣ, когда не всѣ изъ цифръ будутъ въ употребленіи, тогда, чтобы не превышала 100 сумма употребленныхъ цифръ, увеличенная первою слѣва цифрою множимаго и единицею.

Далѣе, уже непосредственно видно, что когда разсматриваемая нами сумма будетъ превышать 100, то правило должно быть подвергнуто новымъ измѣненіямъ, но это весьма рѣдко встрѣчается въ практикѣ.

291. *Примѣръ.* — Возмемъ два числа

31,4159265358 97, 986,96070733

и предположимъ, что требуется получить произведеніе ихъ, съ точностію до 0,001. Въ этомъ примѣрѣ цифра единицъ

множителя должна быть подписана подъ цифрою множимаго, во сто разъ меньшею той, которая выражаетъ степень требуемаго приближенія, а самое дѣйствіе располагаютъ такъ:

31415926535897
33707069689

2827433385
251327408
18849552
2827431
188490
2198
21

3100628485

Сумма употребленныхъ цифръ множителя есть

$$9+8+6+9+6+7+7=52;$$

первая слѣва цифра множимаго есть 3; но, какъ сумма 52+3+1, или 56, менѣе 100, то искомое произведеніе по правилу будетъ

31006, 285.

Это произведеніе приближенное, точное до 0,001, съ недостаткомъ или съ избыткомъ.

292. *Доказательство правила Ухтредта.* — Изъ способа какимъ производилось вычисленіе видно, что всѣ полученныя, отдѣльныя произведенія представляютъ единицы того же порядка какого и цифра множимаго, подъ которою подписана цифра единицъ множителя. Въ примѣрѣ § 291, на которомъ мы будемъ основывать свои разсужденія, отдѣльныя произведенія выражаютъ собою *стотысячныя* доли; сумма же этихъ отдѣльныхъ произведеній очевидно будетъ менѣе точнаго произведенія предложенныхъ чиселъ.

Далѣе, мы при каждомъ отдѣльномъ умноженіи пренебрегаемъ частью множимаго, стоящей вправо отъ той цифры, подъ которой подписана цифра множителя. Число же. выраженное пренебреженными цифрами, менѣе единицы того порядка, съ котораго начинаютъ умноженіе; слѣдовательно рождающаяся ошибка во всякомъ отдѣльномъ произведеніи менѣе произведенія *стотысячной* на цифру множителя. Стало

быть, сумма всѣхъ такихъ ошибокъ въ различныхъ отдѣльныхъ перемноженіяхъ менѣе произведенія *стотысячной* на сумму употребленныхъ цифръ множителя т. е. менѣе чѣмъ $(9+8+6+9+6+7+7)\times 0{,}00001$, или $52\times 0{,}00001$.

Кромѣ того, мы совсѣмъ отбрасываемъ произведеніе множимаго на лѣвую часть множителя 33. Число выражаемое этими цифрами менѣе единицы порядка цифры 7, подписанной подъ первою цифрою множимаго 3. Между тѣмъ число, выражаемое всѣми цифрами множимаго, слѣдующими за первою, менѣе единицы порядка этой первой цифры; слѣдовательно ошибка, происходящая чрезъ отбрасываніе этихъ цифръ множителя, менѣе произведенія *стотысячной* на $3+1$ т. е. менѣе $4\times 0{,}00001$.

Вообще же число 31006,28485, противъ произведенія данныхъ чиселъ, ошибочно на количество меньшее чѣмъ $52+4$ или 56 *стотысячныхъ*, а тѣмъ болѣе меньшее 100 *стотысячныхъ*, или 1 *тысячной*. Поэтому произведеніе данныхъ чиселъ заключается между 31006,28485 и $31006{,}28485+0{,}001=31006{,}28585$. Но точно также, это произведеніе заключается между 31006,284 и 31006,286; т. е. между 31006,284 и 31006,285, или лучше между 31006,285 и 31006,286. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ, число 31006,285, составленное согласно правила, есть произведеніе предложенныхъ чиселъ съ точностію до 0,001, съ недостаткомъ или съ избыткомъ.

Примѣчаніе I. — Предъидущія разсужденія очевидно приложимы къ какой бы то ни было цифрѣ множимаго, подъ которой, по правилу, должно подписать цифру единицъ множителя.

Примѣчаніе II. — Правило Ухтредта приложимо во всѣхъ случаяхъ, будутъ ли множители состоять изъ ограниченнаго числа цифръ или не ограниченнаго.

Вычисленіе, съ даннымъ приближеніемъ, произведенія двухъ чиселъ, которыя могутъ быть вычислены съ какимъ нибудь приближеніемъ.

293. Въ приложеніи правила Ухтредта, цифры множимаго не стоящія надъ множителемъ, точно также и цифры мно-

жителя, не имѣющія надъ собою цифръ множимаго, не оказываютъ на результатъ ни какого вліянія. Онѣ даже могутъ быть откинуты; тогда очевидно, что произведеніе, цифры высшихъ единицъ одного изъ множителей на цифру меньшихъ единицъ другаго множителя, составитъ единицы въ десять разъ меньшія той, которой выражено требуемое приближеніе, или во сто разъ меньшія — смотря по случаю. Изъ этого замѣчанія непосредственно вытекаетъ слѣдующее правило:

Чтобы получить, съ точностію до одной единицы извѣстнаго порядка, произведеніе двухъ соизмѣримыхъ или не соизмѣримыхъ чиселъ, не данныхъ извѣстными, но которыхъ можно вычислить съ какимъ будетъ нужно приближеніемъ:

1°. *Дѣлятъ послѣдовательно единицу, въ десять разъ меньшую той, которую представляетъ требуемое приближеніе, на единицу порядка высшихъ единицъ перваго множителя, потомъ на единицу порядка высшихъ единицъ втораго множителя. Первое полученное частное будетъ единица, выражающая ту степень приближенія, съ которой должно вычислить втораго множителя; второе же частное будетъ единица выражающая степень приближенія, съ какою должно вычислить перваго множителя.*

2°. *Къ двумъ такимъ образомъ вычисленнымъ множителямъ прилагаютъ правило Ухтредта, въ томъ случаѣ, когда сумма цифръ въ одномъ изъ множителей не превышаетъ 10. Въ противномъ случаѣ, должно вычислить на одну, двѣ и т. д. цифры болѣе какъ множимое такъ и множитель.*

Примѣръ. — Требуется вычислить съ точностію до 0,0001 произведеніе $\sqrt{5} - 1$ на число 3,1415926535....., предполагая, что оба множителя могутъ быть вычислены съ какимъ только пожелаютъ приближеніемъ. Такъ какъ высшія единицы каждаго множителя есть единицы цѣлыхъ, то данныя числа должно вычислить съ пятью десятичными; но тогда сумма цифръ составляющихъ одного изъ множителей, увеличенная первою справа цифрою другаго множителя и единицею, даетъ резузьтатъ превышающій 10; поэтому дѣйствіе должно быть расположено такъ, чтобы цифра единицъ множителя была подписана подъ цифрою стотысячныхъ множимаго; слѣдовательно предложенныя числа должны быть вычислены съ

шестью десятичными. Находимъ, что $\sqrt{5}-1=1{,}236067$, съ точностію до 0,000001 съ недостаткомъ. Тогда

3141592
7606321

3141592
628318
94245
18846
186
21

3,883208.

Искомое произведеніе съ точностію до 0,0001 будетъ 3,8833.

Вычисленіе произведеніе двухъ чиселъ, когда только ихъ приближенныя величины извѣстны.

294. Правило Ухтредта позволяетъ еще опредѣлять степень наибольшаго приближенія, съ какимъ можно вычислить произведеніе двухъ чиселъ, когда только ихъ приближенныя величины извѣстны.

Въ самомъ дѣлѣ, мы уже замѣтили, въ приложеніи правила Ухтредта, что высшія единицы однаго изъ множителей, умноженныя на низшія единицы другаго, даютъ единицы въ 10,100, 1000 и т. д. разъ меньшія (смотря по случаю), чѣмъ единица выражающая степень приближенія полученнаго произведенія. Отсюда очевидно, что:

Когда только приближенныя величины двухъ чиселъ извѣстны, тогда, если умножить единицу высшаго порядка каждаго изъ нихъ на единицу извѣстнаго меньшаго порядка другаго, то большее изъ полученныхъ произведеній будетъ единицею въ 10,100,1000 и т. д. разъ меньшею (смотря по случаю), чѣмъ та, которая выражаетъ наибольшую степень приближенія, съ какою можно получить произведеніе двухъ предложенныхъ чиселъ.

Первый примѣръ. — Два числа своими приближенными величинами, съ точностію до 0,0001 съ недостаткомъ имѣютъ

314,1592 и 27,1828. Требуется вычислить ихъ произведеніе съ возможно большимъ приближеніемъ. Большее изъ произведеній $10^2 \times \frac{1}{10^4}$ и $10 \times \frac{1}{10^4}$ есть $\frac{1}{10^2}$, единица же во 100 разъ большая этого произведенія есть единица цѣлыхъ; стало быть, легко усмотрѣть, что требуемое произведеніе чиселъ можно получить съ точностію до одной единицы по правилу § 290.

Второй примѣръ.—Два числа имѣютъ приближенныя величины съ точностію до 0,0001 съ недостаткомъ 31415,9265 и 27182,8182. Требуется вычислить ихъ произведеніе съ возможно большимъ приближеніемъ. Единица, во 100 разъ большая произведенія $10^4 \times \frac{1}{10^4}$ или 1, есть 100; отсюда видно, что требуемое произведеніе можно вычислить съ точностію до одной сотни по правилу Ухтредта.

Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ и степеней.

295. Изъ правила § 293 непосредственно вытекаетъ, относительно прозведенія какого нибудь числа n множителей, слѣдующее:

Чтобы получить съ точностію до одной единицы извѣстнаго порядка произведеніе n *множителей, предварительно неизвѣстныхъ, но которыхъ каждаго можно вычислить съ какимъ пожелается приближеніемъ, для этого находятъ порядокъ высшихъ единицъ перваго множителя, а также и порядокъ высшихъ единицъ произведенія изъ* n—1 *послѣднихъ множителей. Потомъ опредѣляютъ по правилу* § 293 *то приближеніе съ какимъ должно вычислить первый множитель и произведеніе изъ* n—1 *другихъ множителей. Дѣйствуя такимъ же образомъ, опредѣляютъ то приближеніе съ какимъ должно вычислить второй множитель и произведеніе изъ* n—2 *послѣднихъ множителей. Продолжая все такъ, мы получимъ степень приближенія для вычисленія каждаго изъ множителей. Когда множители будутъ уже вычислены съ приличными приближеніями, тогда произведеніе изъ нихъ вычисляется поправилу Ухтредта.*

Примѣчаніе.—Можно встрѣтить затрудненія при отысканіи порядка высшихъ единицъ произведенія изъ n—1 или изъ

n—2 и т. д. послѣднихъ множителей, но вычислить одну высшую единицу произведенія всегда легко, что, какъ мы видѣли, будетъ достаточно.

296. Чтобы имѣть съ возможно большимъ приближеніемъ произведеніе изъ n чиселъ, которыхъ только приближенныя величины извѣстны, вычисляютъ произведеніе изъ двухъ первыхъ, съ возможно большимъ приближеніемъ, по правилу § 294. Потомъ, это произведеніе умножаютъ на третьяго множителя, слѣдуя тому же правилу, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока всѣ множители будутъ употреблены.

Сокращенный способъ Гюи для вычисленія, съ точностію до одной единицы, частнаго двухъ цѣлыхъ чиселъ.

297. Гюи въ 1845 году предложилъ слѣдующій, замѣчательный по простотѣ и точности, способъ для вычисленія, съ точностію до одной единицы, частнаго двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Пусть n *есть число цифръ изъ которыхъ должно состоять частное. Въ дѣлитель слѣва отмѣчаютъ съ точностію столько цифръ, чтобы число ими выражаемое было по крайней мѣрѣ равно* $2n \times 0{,}9$.

При этомъ могутъ быть два случая. 1) число не отмѣченныхъ цифръ дѣлителя будетъ превышать n — 1 *и 2) это число будетъ равно или менѣе* n — 1. *Если случится второе, то необходимо должно опредѣлить первую или нѣкоторыя изъ первыхъ цифръ частнаго обыкновеннымъ способомъ такъ, чтобы* n′ *обозначающее число цифръ, подлежащихъ отысканію въ частномъ, было бы болѣе* n′ — 1 *цифръ дѣлителя, стоящихъ вправо отъ необходимыхъ цифръ для составленія числа по крайней мѣрѣ равнаго* $2n \times 0{,}9$. *Тогда этотъ случай сведется на первый, въ которомъ сокращенный способъ можетъ быть употребленъ прямо. Онъ заключается въ слѣдующемъ:*

Послѣ того, какъ слѣва въ дѣлитель отмѣтятъ столько цифръ, чтобы число ими выражаемое по меньшей мѣрѣ равнялось 2n *числа цифръ частнаго умноженнаго на* 0,9, *отсчитываютъ еще,*

начиная отъ этаго числа, n — 1 *цифръ, а всѣ слѣдующіе, за тѣмъ, сколько бы ихъ не было въ числѣ, зачеркиваютъ.*

Цифры остающіяся въ дѣлитель образуютъ, такъ сказать НАЧАЛЬНЫЙ ДѢЛИТЕЛЬ, *а предварительно отмѣченныя цифры слѣва въ дѣлитель образуютъ* ПОСЛѢДНІЙ ДѢЛИТЕЛЬ. *Затѣмъ въ дѣлимомъ, справа откидываютъ столько цифръ, сколько ихъ находится въ данномъ дѣлитель послѣ отмѣченныхъ цифръ. Оставшаяся часть дѣлимаго есть* НАЧАЛЬНОЕ *или* ПЕРВОЕ ДѢЛИМОЕ.

Первое дѣлимое дѣлятъ на начальный дѣлитель и тѣмъ получаютъ первую цифру частнаго. Этою цифрою умножаютъ начальнаго дѣлителя, прикладывая при этомъ къ произведенію поправку отъ умноженія на первую отброшенную цифру, непосредственно слѣдующую за начальнымъ дѣлителемъ, и найденный результатъ вычитаютъ изъ начальнаго дѣлимаго; полученный остатокъ будетъ вторымъ дѣлимымъ. Потомъ въ дѣлитель отбрасываютъ справа новую цифру, отчего получимъ второй дѣлитель. Второе дѣлимое дѣлятъ на втораго дѣлителя, что и дастъ вторую цифру частнаго. Вычитая изъ втораго дѣлимаго произведеніе втораго дѣлителя на эту цифру, сложенное съ поправкой отъ умноженія на отброшенную предъ этимъ цифру дѣлителя, получаютъ остатокъ, который будетъ третьимъ дѣлимымъ. Въ такомъ порядкѣ продолжаютъ дѣлить послѣдовательные остатки, отбрасывая всякій разъ справа въ дѣлитель по новой цифрѣ до тѣхъ поръ, пока наконецъ и послѣдній дѣлитель будетъ употребленъ;—тогда дѣйствіе окончится.

Послѣ того смотрятъ дѣлитель не менѣе ли числа, которое получится, приписавъ справа къ послѣднему остатку отброшенныя цифры дѣлимаго. Если это случится, то найденное частное надо будетъ увеличить единицею.

Тогда число написанное въ частномъ во всякомъ случаѣ будетъ частнымъ данныхъ чиселъ съ недостаткомъ или съ избыткомъ и съ точностію до одной единицы.

298. *Примѣръ.*—Возьмемъ два числа.

2209368217 и 802198.

Дѣйствіе располагаютъ такъ:

2209368217 | 802198

Число цифръ частнаго будетъ 4 и такъ какъ первая цифра дѣлителя 8 превышаетъ произведеніе 2×4 на 0,9, то согласно правила, послѣднимъ дѣлителемъ можно принять 8. Эту цифру отмѣчаютъ горизонтальной надъ нею черточкой, потомъ, начиная отъ этой цифры, отсчитываютъ 4—1 слѣдующихъ цифръ т. е. 0, 2, 1, а двѣ послѣднія 9 и 8 зачеркиваютъ. Такимъ образомъ начальный дѣлитель будетъ 8021. Послѣ того отдѣляютъ справа въ дѣлимомъ пять цифръ, потому что дѣлитель имѣетъ столько цифръ послѣ отмѣченной цифры. Отдѣленныя цифры отмѣчаютъ горизонтальною подъ ними чертою. Тогда начальное дѣлимое будетъ 22093,

Раздѣливъ 22093 на 8021 находятъ въ частномъ 2

2209368217	802198
6050	2754
436	
35	
3	

и составляютъ произведеніе изъ 8021 на 2, прибавляя къ нему единицу, происшедшую отъ умноженія на 2 первой отброшенной цифры 9, непосредственно слѣдующей за 8021; полученный результатъ вычитаютъ изъ перваго дѣлимаго 22093 и остатокъ 6050 будетъ вторымъ дѣлимымъ. Въ дѣлителѣ отбрасываютъ цифру 1 и тѣмъ получаютъ втораго дѣлителя 802. Дѣлятъ 6050 на 802, находятъ въ частномъ 7; это будетъ вторая цифра искомаго частнаго. Составляютъ произведеніе изъ 802 на 7 и вычитаютъ его изъ 6050; остатокъ 436 будетъ третьимъ дѣлимымъ. Здѣсь мы вычли только произведеніе 802 на 7 потому, что произведеніе на 7 первой отброшенной цифры, слѣдующей за 802, не даетъ поправки. Въ дѣлителѣ послѣ того отбрасываютъ цифру 2 и получаютъ третьяго дѣлителя 80. Дѣлятъ 436 на 80 находятъ въ частномъ 5 — это есть третья цифра искомаго частнаго. Составляютъ произведеніе 80 на 5, прибавляя къ нему единицу, происходящую отъ умноженія на 5 первой отброшенной цифры 2, непосредственно слѣдующей за 80. Полученный результатъ вычитаютъ изъ 436 и остатокъ 35 будетъ четвертымъ дѣлимымъ. Цифру 0 въ дѣлителѣ отбрасываютъ—получится наконецъ послѣдній дѣлитель 8. Дѣлятъ 35 на 8, въ частномъ находятъ 4, что и будетъ послѣдней

цифрой частнаго. Вычитая изъ 35 произведеній 8 на 4 получаютъ послѣдній остатокъ 3. Число полученное отъ снесенія справа къ послѣднему остатку отдѣленныхъ цифръ дѣлимаго есть 368217. Это число менѣе дѣлителя 802198; слѣдовательно 2754, согласно правила, будетъ требуемое частное, съ точностію до одной единицы.

299. *Доказательство правилъ Гюи.* — Теперь мы докажемъ точность правила Гюи, котораго механизмъ мы достаточно изложили.

Сохранимъ примѣръ § 298, надъ которымъ сокращенный способъ могъ быть употребленъ прямо.

Сдѣлаемъ предварительно три важныхъ замѣчанія:

1°. *Частное перваго отдѣльнаго дѣленія можетъ имѣть только одну цифру.*

Въ самомъ дѣлѣ, частное данныхъ чиселъ въ четыре цифры; слѣдовательно, если отбросимъ двѣ цифры справа въ дѣлителѣ и (4—1)+2 цифры справа въ дѣлимомъ, то частное образовавшихся такимъ образомъ чиселъ очевидно будетъ имѣть только одну цифру.

2° *Каждый изъ остатковъ, полученныхъ въ ходѣ дѣйствія, менѣе соотвѣтствующаго дѣлителя.*

Разсмотримъ, напримѣръ, первое отдѣльное дѣленіе. 22093 дѣлится на 8021 и получается въ частномъ 2. Чтобы эта цифра 2 была истинною, то должно чтобы произведеніе 8021 на 2, увеличенное поправкой отъ умноженія 2 на отброшенную цифру 9, могло быть вычтено изъ 22093, т. е. иначе сказать, чтобы можно было изъ 22093 вычесть цѣлую часть произведенія $8021{,}9\times2$. Такимъ образомъ видно, что цифра 2 есть истинная и слѣдовательно остатокъ перваго отдѣльнаго дѣленія есть избытокъ 22093 надъ цѣлою частью $8021{,}9\times2$. Послѣ того, если остатокъ будетъ болѣе 8021, то онъ долженъ быть не болѣе, какъ равенъ 8022. Поэтому 22093 будетъ не болѣе какъ равно цѣлой части $8021{,}9\times2+8022$, или иначе, не болѣе какъ равно $8021{,}9\times3$. Но это невозможно, ибо тогда первою цифрою частнаго будет[illegible], а не 2. По этому остатокъ отъ перваго отдѣльнаго д[illegible]ія не можетъ превышать 8021. Понятно, что такого рода [illegible]зсужденіе приложимо и къ слѣдующимъ остаткамъ вооб[illegible]а въ частности видно, что:

Послѣдній остатокъ по большей мѣрѣ равенъ послѣднему дѣлителю.

3°. *Число образующееся отъ снесенія отброшенныхъ цифръ дѣлимаго и приписанія ихъ справа къ послѣднему остатку менѣе двойнаго даннаго дѣлителя.*

Въ самомъ дѣлѣ, послѣдній остатокъ по большей мѣрѣ равенъ послѣднему дѣлителю; однакожъ отброшенныхъ цифръ въ данномъ дѣлимомъ столько же сколько таковыхъ справа въ послѣднемъ дѣлителѣ. Слѣдовательно, число образовавшееся отъ снесенія отброшенныхъ справа цифръ даннаго дѣлимаго, для приписанія справа къ послѣднему остатку, будетъ имѣть столько же цифръ, сколько ихъ было въ данномъ дѣлителѣ; но, въ то же время, первая слѣва цифра этого числа не можетъ превышать первую слѣва цифру въ дѣлителѣ. Поэтому очевидно, что число, о которомъ идетъ рѣчь, не можетъ превышать двойнаго дѣлителя.

Затѣмъ, въ нашемъ примѣрѣ, число образовавшееся отъ снесенія къ правой сторонѣ послѣдняго остатка отброшенныхъ цифръ дѣлимаго есть 368217. Это число очевидно можетъ быть получено, вычитая изъ даннаго дѣлимаго 2209368217 не точныя произведенія дѣлителя 802198 на различныя цифры написанныя въ частномъ, но произведенія уменьшенныя каждае на какое нибудь извѣстное количество. Поэтому, если мы чрезъ E назовемъ сумму отброшенныхъ количествъ въ этихъ различныхъ произведеніяхъ, то будемъ имѣть

$$2209368217 - 802198 \times 2754 + 368217 - E, \ldots\ldots (1)$$

или раздѣляя на 802198,

$$\frac{2209368217}{802198} = 2754 + \frac{368217}{802198} - \frac{E}{802198}; \ldots\ldots (2)$$

говорю, что число E менѣе дѣлителя 802198.

Дѣйствительно, въ произведеніи дѣлителя на цифру тысячъ частнаго 2, пренебрегаются единицы произведенія отброшенной цифры 9 на 2. Число этихъ единицъ по большей мѣрѣ равно 9, слѣдовательно происходящая отъ этого ошибка не превышаетъ 90×1000 или $0{,}9 \times 100000$. Кромѣ того окончательно пренебрегаютъ произведеніемъ на 2 отброшенной цифры 8, меньшей чѣмъ 10, и такъ какъ первая цифра

частнаго не болѣе 9, то происходящая отъ этого ошибка будетъ менѣе чѣмъ 10×9000 или $0{,}9\times100000$. Такимъ образомъ пренебрегаемое количество въ первомъ отдѣльномъ произведеніи менѣе чѣмъ $2\times0{,}9\times100000$.

Разсмотримъ еще второе отдѣльное произведеніе. Въ произведеніи дѣлителя на цифру сотенъ частнаго 7 пренебрегаютъ единицами произведенія на 7 отброшенной цифры 1. Число этихъ единицъ по большей мѣрѣ равно 9; слѣдовательно происходящая отъ того ошибка не будетъ превышать 900×100 или 0,9 на 100000. Сверхъ того совершенно пренебрегаютъ произведеніемъ на 7 отброшенныхъ цифръ 9 и 8; число же составленное изъ этихъ цифръ менѣе 100 и вторая цифра частнаго не болѣе 9, поэтому происходящая отъ того ошибка будетъ менѣе 100×900 или $0{,}9\times100000$. Такимъ образомъ пренебрегаемое количество во второмъ отдѣльномъ произведеніи мѣнѣе чѣмъ $2\times0{,}9\times100000$.

Разсуждая точно также, мы убѣдимся, что въ каждомъ изъ слѣдующихъ отдѣльныхъ произведеній пренебрегаемое количество менѣе чѣмъ $2\times0{,}9\times100000$. И такъ какъ частное состоитъ изъ четырехъ цифръ, то очевидно, что число E будетъ менѣе чѣмъ $2\times4\times0{,}9\times100000$. Начальный же дѣлитель 8, по правилу, по меньшей мѣрѣ равенъ $2\times4\times0{,}9$, поэтому 8×100000 или 800000 по меньшей мѣрѣ равно.

$$2\times4\times0{,}9\times100000;$$

слѣдовательно, E менѣе чѣмъ 800000, а тѣмъ болѣе оно будетъ меньше даннаго дѣлителя 802198.

Вернемся теперь къ равенству (2). Число 368217 менѣе чѣмъ дѣлитель 802198; слѣдовательно, обѣ дроби $\frac{368217}{802198}$ и $\frac{E}{802198}$ менѣе единицы. Потому 2754 будетъ разниться отъ частнаго данныхъ чиселъ, съ избыткомъ или съ недостаткомъ, но все таки на дробь меньшую единицы; поэтому 2754 есть или точная величина частнаго, или приближенная, менѣе чѣмъ на одну единицу.

300. Вообще же, Пусть A дѣлимое, B дѣлитель, Q число состоящее изъ цифръ послѣдовательно полученныхъ въ частномъ, R число образовавшееся чрезъ приписку справа къ послѣднему остатку отброшенныхъ цифръ дѣлимаго и E число меньшее дѣлителя B; тогда будетъ

$$A=BQ+R-E,$$

или

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} - \frac{E}{B}.$$

Мы будемъ различать два случая:

1°. R=или < B. Тогда дробь $\frac{R}{B}$ не болѣе какъ равна 1; но какъ $\frac{E}{B}$ менѣе 1, то очевидно, что $\frac{A}{B}$ будутъ заключаться между Q—1 и Q + 1, т. е. между Q — 1, и Q, или между Q и Q + 1. Въ томъ и въ другомъ случаѣ, Q есть приближенная величина для $\frac{A}{B}$ съ недостаткомъ или съ избыткомъ съ точностію до одной единицы.

2°. R > B. Такъ какъ R не можетъ превышать 2B, то цѣлое заключающееся въ дроби $\frac{R}{B}$ есть 1, и тогда можно положить, что

$$\frac{A}{B} = Q + 1 + \frac{R-B}{B} - \frac{E}{B}.$$

Дроби $\frac{R-B}{B}$ и $\frac{E}{B}$ менѣе единицы, стало быть очевидно, что $\frac{A}{B}$ будетъ заключаться между

$$(Q+1)-1=Q \text{ и } (Q+1)+1=Q+2.$$

т. е. между Q и Q+1, или между Q+1 и Q+2. Въ обоихъ случаяхъ Q+1 есть приближенная величина для $\frac{A}{B}$, съ точностію до одной единицы, съ недостаткомъ или съ избыткомъ.

Поэтому должно, согласно правила, когда встрѣтится подобный случай, увеличивать единицею число написанное въ частномъ,

Примѣчаніе.—Весьма рѣдко случается брать болѣе двухъ или трехъ цифръ для образованія послѣдняго дѣлителя. Когда приходится брать четыре, то по тому же правилу должно, чтобы частное состояло изъ 55 цифръ и это при неблагопріятномъ случаѣ, когда первыя три цифры въ дѣлителѣ будутъ 1, 0, 0.

Распространеніе способа Гюи на десятичныя числа.

301. Дѣленіе двухъ десятичныхъ чиселъ сводится всегда (§196) на дѣленіе двухъ цѣлыхъ чиселъ. Вотъ правило, которымъ

должно руководствоваться, чтобы получить частное съ точностію до одной единицы, когда жалаютъ употребить сокращенный способъ Гюи.

Пусть n *число цифръ долженствующихъ быть въ частномъ; въ дѣлитель слѣва отмѣчаютъ съ точностію столько цифръ, чтобы число ими выражаемое по меньшей мѣрѣ было равно* $2n \times 0,9$. *Послѣ того могутъ представиться два случая:* 1^0 *число не отмѣченныхъ цифръ дѣлителя будетъ менѣе или равно* $n-1$; 2^0 *это число будетъ болѣе* $n-1$.

Въ первомъ случаѣ, запятую въ дѣлитель отбрасываютъ, а въ дѣлимомъ переносятъ ее вправо чрезъ столько порядковъ, сколько дѣсятичныхъ имѣетъ дѣлитель, оставшіяся десятичныя въ дѣлимомъ отбрасываютъ и находятъ частное для полученныхъ цѣлыхъ чиселъ съ точностію до одной единицы. Должно замѣтить, что тутъ сокращенный способъ не можетъ быть употребленъ сначала.

Во второмъ случаѣ, послѣ отмѣтки слѣва въ дѣлитель въ точности столькихъ цифръ, чтобы образовалось число по меньшей мѣрѣ равное $2n \times 0,9$, *отсчитываютъ еще* n *цифръ, послѣ которыхъ помѣщаютъ запятую; потомъ запятую въ дѣлимомъ перемѣщаютъ на то мѣсто, которое она должна занимать. Наконецъ, всѣ оставшіяся десятичныя въ дѣлимомъ и въ дѣлитель, сколько бы ихъ не было, отбрасываютъ и находятъ съ точностію до одной единицы частное для полученныхъ цѣлыхъ чиселъ. Въ этомъ случаѣ сокращенный способъ можетъ быть употребленъ съ самаго начала.*

302. *Первый случай.*—Пусть дѣлитель приведенъ въ цѣлое число B, A цѣлая часть и *a* десятичная часть дѣлимаго. Произведемъ дѣленіе A на B, прилагая сокращенный способъ съ тѣхъ поръ, когда это сдѣлается возможнымъ; положимъ: что Q найденное частное, R число происшедшее отъ приписки справа къ послѣднему остатку отброшенныхъ цифръ въ дѣлимомъ A, E число меньшее дѣлителя B; получимъ

$$A = BQ + R - E,$$

а слѣдовательно прибавляя *a*,

$$A + a = BQ + R + a - E,$$

потомъ дѣля на B, получимъ

$$\frac{A+a}{B} = Q + \frac{R+a}{B} - \frac{E}{B}.$$

Мы уже видѣли, что R менѣе 2B, тоже будетъ и съ $R+a$, потому что a есть дробь; прилагая же къ предъидущему равенству разсужденіе § 300, увидимъ, что величина частнаго $\frac{A+a}{B}$ получится, принимая для нея число Q тогда, когда $R+a < B$ и число $Q+1$, когда $R+a > B$.

Примѣръ.—Требуется найти, съ точностію до одной единицы частное двухъ чиселъ 31415926,535897 и 27,1828. Частное будетъ въ семь цифръ, поэтому должно въ дѣлителѣ взять двѣ цифры, чтобы составить число большее $2\times7\times0,9$. Послѣ этихъ двухъ цифръ въ дѣлителѣ остается еще только четыре цифры, слѣдовательно этотъ примѣръ принадлежитъ къ первому случаю. Имѣемъ тогда:

$$B = 271828,\ A = 31415926535\overline{8},\ a = 0,97.$$

Дѣлимъ A на B

31415926535<u>8</u>	<u>2</u>71828
423312	1155728
1514846	
155706	
19792	
765	
222	
5	

Три первыя цифры частнаго опредѣлены по обыкновенному способу. Число обозначенное чрезъ R есть 55358. Такъ какъ 55358,97 менѣе дѣлителя 271828, то найденное число 1155728 есть частное данныхъ чиселъ съ точностію до одной единицы.

303. *Второй случай.*—Запятая въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ должна быть помѣщена такъ, какъ указываетъ правило § 301; пусть A будетъ цѣлая и a десятичная часть дѣлимаго, B цѣлая и b десятичная часть дѣлителя. Произведемъ дѣленіе A на B по сокращенному способу, такъ какъ его можно употребить съ самаго начала. Пусть Q будетъ найденное частное и R число образовавшееся отъ снесенія справа къ послѣднему остатку отброшенныхъ цифръ дѣлимаго A. Я

говорю, что частное отъ дѣленія двухъ десятичныхъ чиселъ $A+a$ и $B+b$, съ точностію до одной единицы, найдется, принявъ число Q или число Q+1, смотря по случаю.

Въ самомъ дѣлѣ, можно всегда сдѣлать такъ, что a и b будутъ имѣть одно и тоже число m десятичныхъ, тогда обозначимъ чрезъ A' и B' цѣлыя, полученныя отъ опущенія запятыхъ въ десятичныхъ числахъ $A+a$ и $B+b$. Частное данныхъ чиселъ будетъ равно частному чиселъ цѣлыхъ A' и B'; прилагая же къ числамъ A' и B' способъ Гюи, m послѣднихъ знаковъ въ каждомъ изъ этихъ чиселъ очевидно не будутъ играть въ дѣйствіи ни какой роли. Найденное частное будетъ Q и R′ число, полученное отъ снесенія справа къ послѣднему остатку отброшенныхъ цифръ дѣлимаго A'; оно будетъ цѣлымъ, потому что въ десятичномъ числѣ $R+a$ была отброшена запятая.

Такимъ образомъ, если $R+a$ равно или менѣе $B+b$, число Q будетъ частнымъ предложенныхъ чиселъ, съ точностію до одной единицы. Если же напротивъ, $R+a$ будетъ болѣе $B+b$, то должно будетъ взять Q+1, чтобы имѣть частное съ точностію до одной единицы.

Примѣръ.—Требуется найти частное съ точностію до одной единицы, для чиселъ 31415926,535897 и 27,18281828. Частное должно быть въ семь цифръ; поэтому должно взять двѣ цифры въ дѣлителѣ, чтобы получить число превышающее $2\times7\times0{,}9$; за этими двумя цифрами слѣдуетъ болѣе шести цифръ, значитъ примѣръ относится ко второму случаю. Тогда имѣемъ:

$$A = 31415926535\,8970,\quad a = 0,$$
$$B = 271828182,\qquad b = 0{,}8.$$

Дѣлимъ A на B, употребляя съ самаго начала сокращенный способъ,

31415926535 8970	271828182
4233108	1155727
1514827	
155687	
19773	
746	
203	
14	

Число обозначавшееся чрезъ R есть 145358970 и имѣемъ

$$R + a < B + b;$$

слѣдовательно, найденное число 1155727 есть величина частнаго данныхъ чиселъ, съ точностію до одной единицы.

304. Вычисленіе частнаго двухъ цѣлыхъ или десятичныхъ чиселъ, съ точностію до одной единицы какого бы то не было порядка, приводится къ тому случаю, который мы изучаемъ.

Предположимъ прежде, что требуется вычислить частное двухъ цѣлыхъ или десятичныхъ чиселъ A и B съ точностію до $\frac{1}{10^n}$. Это частное равно дроби $\frac{A}{B}$, поэтому достаточно (§ 198) вычислить $\frac{A \times 10^n}{B}$ съ точностію до одной единицы, отдѣливъ n десятичныхъ знаковъ въ результатѣ.

Напротивъ, если требуется найти частное для чиселъ A и B съ точностію до 10^n, то достаточно вычислить съ точностію до единицы частное $\frac{A}{B \times 10^n}$ и приписать n нулей справа въ результатѣ.

Примѣчаніе I.—Правила, которыя мы указали, приложимы всегда, сколько бы не было десятичныхъ въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ. Они также приложимы и къ десятичнымъ безконечнымъ числамъ, но въ этомъ случаѣ нѣсколько затруднительно узнавать, нужно ли увеличивать единицею послѣднюю цифру частнаго, къ которому приводитъ правило Гюи. Но это затрудненіе устраняютъ тѣмъ, что вычисляютъ въ частномъ одною цифрою болѣе, т. е. поступаютъ такъ, какъ бы слѣдовало находить частное съ точностію до одной единицы, въ десять разъ меньшей той, которая выражаетъ требуемую степень приближенія.

Примѣчаніе II.—Когда дѣлитель будетъ состоять изъ малаго числа цифръ, то можно обойтись безъ сокращеннаго способа. Тогда частное во всякомъ случаѣ получится съ точностію до одной единицы. Пусть A будетъ дѣлимое; B дѣлитель, который всегда можно предположить цѣлымъ;

тогда частное цѣлой части A на B вычисляютъ обыкновеннымъ способомъ.

Вычисленіе, съ даннымъ приближеніемъ, частнаго двухъ чиселъ, которыя могутъ быть вычислены съ какимъ нибудь приближеніемъ.

305. Все предъидущее непосредственно приводитъ къ слѣдующему правилу:

Чтобы вычислить съ точностію до одной единицы извѣстнаго порядка, частное двухъ чиселъ, предварительно неизвѣстныхъ, но которыя можно вычислить съ точностію до одной единицы какого бы то ни было порядка; для этого опредѣляютъ прежде число N *цифръ долженствующихъ быть въ частномъ выраженномъ въ единицахъ того же порядка какого и единица выражающая требуемую степень приближенія. Послѣ того вычисляютъ столько цифръ въ дѣлитель, чтобы составилось число по крайней мѣрѣ равное* $2n \times 0{,}9$ *и потомъ опредѣляютъ* n *прочихъ. Затѣмъ вычисляютъ первыя цифры дѣлимаго до той, которая выражаетъ единицы того же порядка, какой получится, умножая единицу порядка послѣдней вычисленной цифры дѣлителя на единицу, выражающую требуемую степень приближенія. Если между вычисленными цифрами будутъ находиться десятичныя то откидываютъ запятую и производятъ дѣленіе полученныхъ цѣлыхъ по сокращенному способу, который можно употребить вначалѣ. Полученное частное, или это частное увеличенное на единицу, будетъ искомымъ частнымъ, выраженнымъ въ единицахъ того же порядка, какой указанъ степенью требуемаго приближенія.*

Это правило ни коимъ образомъ не должно измѣниться въ томъ случаѣ, когда дѣлимое будетъ предварительно извѣстно, дѣлитель же не будетъ, но можетъ быть вычисленъ съ какимъ нибудь приближеніемъ. Точно также и въ томъ случаѣ, когда дѣлитель будетъ прежде извѣстенъ, дѣлимое же не будетъ и притомъ, когда n, означающее число цифръ частнаго, будетъ болѣе $n-1$ цифръ дѣлителя, стоящихъ вправо отъ цифръ необходимыхъ для образованія числа равнаго или превышающаго $2n \times 0{,}9$. Это условіе всегда можно выполнить, приписавъ нули справа къ данному дѣлителю,

но еще проще этаго не дѣлать. Дѣлимое вычисляютъ, какъ указываетъ предъидущее правило; запятую въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, если она будетъ, отбрасываютъ и производятъ дѣленіе полученныхъ цѣлыхъ сокращеннымъ способомъ, который въ этомъ случаѣ не можетъ быть употребленъ съ самаго начала. Такимъ образомъ получаютъ искомое частное, выраженное въ единицахъ того же порядка, который указанъ степенью требуемаго приближенія.

Вычисленіе частнаго двухъ чиселъ, когда извѣстны только ихъ приближенныя величины

306. Способъ Гюи даетъ еще средство вычислять съ возможно наибольшимъ приближеніемъ частное двухъ чиселъ, когда извѣстны только ихъ приближенныя величины.

Всегда можно положить, что данный дѣлитель будетъ цѣлымъ; обозначимъ чрезъ n число его цифръ. Можно также отбросить запятую, если таковая будетъ въ дѣлимомъ, или нули, приписанныя справа къ дѣлимому для удержанія мѣста нѣсколькихъ не извѣстныхъ цифръ; ибо порядокъ высшихъ единицъ искомаго частнаго предварительно извѣстенъ. Такимъ образомъ все сведется на дѣленіе двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Такъ какъ дѣлитель въ точности не извѣстенъ, то нельзя сохранить, для составленія начальнаго дѣлителя, болѣе $n-1$ цифръ, $n^{\text{ная}}$ цифра должна быть отброшена. Послѣ того могутъ встрѣтиться два случая: 1^0 дѣлимое будетъ менѣе числа составленнаго изъ $n-1$ первыхъ цифръ дѣлителя, 2^0 оно будетъ равно или болѣе этаго числа.

Въ первомъ случаѣ, предлагаемое дѣлимое будетъ начальнымъ дѣлимымъ и должно отбросить, справа въ дѣлителѣ, одной или двумя цифрами болѣе, такъ чтобы число, выраженное не отброшенными цифрами, заключалось въ дѣлимомъ, и такимъ образомъ будетъ опредѣленъ начальный дѣлитель.

Во второмъ случаѣ, $n-1$ первыхъ цифръ дѣлителя составятъ начальный дѣлитель и, справа въ дѣлимомъ, берутъ стокько цифръ, чтобы въ образуемомъ ими числѣ заключал-

ся начальный дѣлитель, а прочія цифры отбрасываютъ. Такимъ образомъ получится начальное дѣлимое.

Остается опредѣлить послѣдній дѣлитель. Для этого, пусть k будетъ число цифръ начальнаго дѣлителя. Если первая слѣва цифра дѣлителя покрайней мѣрѣ равна $2k \times 0{,}9$, то эта первая цифра составитъ послѣдняго дѣлителя и въ частномъ можно опредѣлить k цифръ. Въ противномъ случаѣ берутъ двѣ первыя цифры въ начальномъ дѣлителѣ и тогда въ частномъ можно опредѣлить $k-1$ цифръ и т. д.

Точность этаго способа непосредственно вытекаетъ изъ того же правилъ Гюи. Въ самомъ дѣлѣ, данныя дѣлимое и дѣлитель могутъ быть разсматриваемы произшедшими отъ приписки справа къ начальнымъ дѣлимому и дѣлителю различныхъ цифръ, не играющихъ ни какой роли въ дѣйствіи.

Примѣчаніе. — Также поступаютъ и тогда, когда дѣлимое и дѣлитель будутъ въ точности извѣстны. Но необходимо замѣтить, что въ точности извѣстный дѣлитель можно брать начальнымъ дѣлителемъ до тѣхъ поръ, пока онъ не превыситъ числа выраженнаго извѣстными цифрами дѣлимаго.

Примѣръ. — Требуется вычислить, съ возможно большимъ приближеніемъ, частное чиселъ

3,1415926535....., 3,183098.....,

въ которыхъ извѣстно только 10 и 6 десятичныхъ, соотвѣтственно. Приведя къ дѣленію цѣлыхъ чиселъ, будетъ

3141592 и 3183098,

Такъ какъ число 3,141592 содержитъ 318309, то это будетъ второй случай. Первая цифра 3 не содержитъ $2 \times 5 \times 0{,}9$, стало быть не можетъ быть послѣднимъ дѣлителемъ. Но, какъ 31 болѣе $2 \times 4 \times 0{,}9$, то это число можетъ быть принято послѣднимъ дѣлителемъ.

3141592	3183098
276804	986960
22157	
3059	
195	
5	

Высшія единицы искомаго частнаго есть десятыя, то очевидно, что это частное можно получить съ точностію до

одной единицы шестаго десятичнаго порядка. Его величина будетъ 0,986960.

Упражненія.

1. Вычислить, съ точностію до 0,00001, числа

$$\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

2. Вычислить, съ точностію до 0,000001, квадратъ, кубъ и четвертую степень числа

$$\pi = 3,14159265358979323846.....$$

3. Вычислить съ точностію до 0,0000001, частное

$$\frac{\frac{\pi^3}{6} - \pi}{\frac{\pi^4}{24} + 1 - \frac{\pi^2}{2}}$$

въ которомъ π есть таже величина, что и въ предъидущемъ упражненіи.

4. Вычислить, съ возможно большимъ приближеніемъ частное $\frac{g}{\pi^2}$. Число g по величинѣ равно 9,80896, а число π та же величина что и въ предъидущемъ упражненіи.

5. Какое наибольшее приближеніе, съ которымъ можно вычислить квадратъ и кубъ числа $g = 9,80896....$?

6. Доказать, что въ приложеніи правила Гюи, если начальный дѣлитель и данный дѣлитель одинъ и тотъ же, и число цифръ въ частномъ будетъ n, то достаточно, чтобы послѣдній дѣлитель былъ равенъ или былъ болѣе

$$(2n-1) \times 0,9,$$

чтобы получить частное съ точностію до одной единицы

КНИГА ПЯТАЯ.

ПРОПОРЦІИ, ПРОГРЕССІИ И ЛОГАРИѲМЫ.

ГЛАВА I.

ТЕОРІЯ ПРОПОРЦІЙ.

Объ отношеніяхъ.—О пропорціяхъ.—Свойства пропорцій.—Ряды равныхъ отношеній.—Среднія для двухъ или для нѣсколькихъ чиселъ.

Объ отношеніяхъ.

307. *Отношеніемъ* однаго числа къ другому называется частное отъ дѣленія перваго числа на второе.

Первое число называется *предъидущимъ* отношенія, а второе его *послѣдующимъ*.

Такимъ образомъ отношеніе 8 къ 2 есть 8:2 или $\frac{8}{2}$; 8 есть предъидущій отношенія, 2 его послѣдующій. Точно также отношеніе $\sqrt[3]{5}$ къ $\sqrt{2}$ есть $\sqrt[3]{5}:\sqrt{2}$ или $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}$; здѣсь $\sqrt[3]{5}$ предъидущій, а $\sqrt{2}$ послѣдующій.

Два отношенія называются *обратными*, когда предъидущій перваго равенъ послѣдующему втораго и обратно. Такъ $\frac{8}{2}$ и $\frac{2}{8}$ суть обратныя отношенія; очевидно что произведеніе двухъ обратныхъ отношеній равно единицѣ.

308. Отношеніемъ одной величины къ другой съ нею однородной называется число выражающее мѣру первой величины, когда вторая принята за единицу.

Теорема.—*Отношеніе одной величины къ другой, съ нею однородной, равно отношенію числа, выражающаго первую величину, къ числу выражающему вторую, какова бы ни была единица, употреблявшаяся для измѣренія обѣихъ величинъ.*

Предположимъ прежде, что обѣ взятыя нами величины, какъ та такъ и другая, соизмѣримы съ принятою единицею; пусть $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{7}$ будутъ числа измѣряющія эти величины. Первая величина составляетъ $\frac{3}{4}$ единицы, вторая $\frac{5}{7}$ единицы; тогда единица есть $\frac{7}{5}$ второй величины; слѣдовательно первая величина равна $\frac{3}{4}$ или $\frac{7}{5}$ второй. Отсюда заключаемъ, что если принять вторую величину за единицу, то первая будетъ выражаться числомъ $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$ или $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$. Другими словами, отношеніе первой величины ко второй есть $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$.

Теперь предположимъ, что меньшая изъ двухъ разсматриваемыхъ нами величинъ будетъ несоизмѣрима съ принятою единицею. Пусть a и b будутъ числа выражающія эти величины и r отношеніе первой ко второй.

Мы можемъ составить двѣ новыя величины, соизмѣримыя съ принятой единицей, и разность которыхъ съ двумя данными такъ мала, какъ только можно, Пусть a' и b' будутъ числа выражающія эти новыя величины и r' ихъ отношеніе; тогда

$$\frac{a'}{b'} = r'.$$

Если мы теперь представимъ себѣ, что новыя величины неопредѣленно приближаются къ двумъ даннымъ, оставаясь постоянно соизмѣримыми съ принятой единицей, то и числа $\frac{a'}{b'}$ и r' неопредѣленно приблизятся къ числамъ $\frac{a}{b}$ и r, оставаясь

постоянно равными между собою. Слѣдовательно необходимо будетъ

$$\frac{a}{b} = r\ (*).$$

О пропорціяхъ.

309. Говорятъ, что четыре числа *пропорціональны* тогда, когда отношеніе перваго ко второму равно отношенію третьяго къ четвертому.

Поэтому *пропорція* есть равенство двухъ отношеній.

(*) Вторая часть доказательства, въ томъ случаѣ, когда по крайней мѣрѣ одна изъ двухъ величинъ несоизмѣрима съ единицею, не представляетъ желаемой строгости. Поэтому мы считаемъ нужнымъ предложить другое, для котораго подобнаго рода упрекъ будетъ лишнимъ.

Раздѣлимъ единицу на какое нибудь число n равныхъ частей и предположимъ, что двѣ данныя величины имѣютъ соотвѣтственно m и m' таковыхъ частей; но не содержатъ ихъ соотвѣтственно $m+1$ и $m'+1$.

По опредѣленію несоизмѣримыхъ чиселъ, мы имѣемъ, что

$$\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n},$$

$$\frac{m'}{n} < b < \frac{m'+1}{n};$$

откуда раздѣливъ, заключаемъ, что

$$\frac{a}{b} > \frac{m}{n} : \frac{m'+1}{n}, \text{ или } > \frac{m}{m'+1},$$

$$\frac{a}{b} < \frac{m+1}{n} : \frac{m'}{n}, \text{ или } < \frac{m+1}{m'}.$$

Теперь, если вторую величину раздѣлимъ на m' равныхъ частей, то первая величина не будетъ содержать $m+1$ такихъ частей; ибо они болѣе чѣмъ $n^{\text{выя}}$ части единицы. Поэтому

$$r < \frac{m+1}{m'}$$

Напримѣръ отношеніе 8 къ 2, будучи равно отношенію 12 къ 3, даетъ.

$$\frac{8}{2} = \frac{12}{3},$$

или

$$8 : 2 = 12 : 3,$$

это и есть пропорція. Точно также отношеніе $\frac{3}{4}$ къ $\frac{5}{7}$ бу-

---

Точно также, если раздѣлимъ вторую величину на $m'+1$ равныхъ частей, то первая величина будетъ содержать по крайнѣй мѣрѣ m такихъ частей, ибо они менѣе чѣмъ $n^{\text{выя}}$ части единицы. Поэтому

$$r > \frac{m}{m'+1}.$$

Изъ этаго видимъ, что числа r и $\frac{a}{b}$, какъ одно такъ и другое заключаются между дробями $\frac{m+1}{m'}$ и $\frac{m}{m'+1}$, которыхъ разность есть

$$\frac{(m+1)(m'+1)-mm'}{m'(m'+1)}, \text{ или } \frac{m+m'+1}{m'(m'+1)} \text{ или}$$

$$\frac{1}{m'}\left(\frac{m}{m'+1}+1\right).$$

Поэтому если r и $\frac{a}{b}$ не равны, то ихъ разность будетъ менѣе чѣмъ

$$\frac{1}{m'}\left(\frac{m}{m'+1}+1\right),$$

а тѣмъ болѣе меньше чѣмъ

$$\frac{1}{m}\left(\frac{a}{b} \times 1\right).$$

Но цѣлое m можно во всякомъ случаѣ сдѣлать настолько большимъ, что $m^{\text{вая}}$ часть $\frac{a}{b}+1$ будетъ менѣе всякой данной величины. Поэтому необходимо чтобы

$$r = \frac{a}{b}.$$

(*Прим. автора*).

дучи равно $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$, или $\frac{3\times7}{4\times5}$, т. е. равное отношенію 21 къ 20 даетъ равенство

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)} = \frac{21}{20},$$

или

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = 21 : 20;$$

это есть также пропорція.

310. Говорятъ, что четыре величины *пропорціональны*, когда отношеніе первой ко второй равно отношенію третьей къ четвертой.

Изъ предъидущаго мы видимъ, *что когда четыре величины пропорціональны, то числа, выражающія эти величины также пропорціональны и на оборотъ*. Вотъ почему разсматриваемыя въ различныхъ частяхъ математики величины, составляющія пропорціи, мы всегда предполагаемъ вычисленными.

311. Пропорція

$$a : b = c : d \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

выговаривается

a относится къ b такъ какъ c относится къ d; a и d называются *крайними членами* или *крайними*, b и c *средними членами* или *средними*; a есть первый предъидущій, b первый послѣдующій, c второй предъидущій, d второй послѣдующій; $a : b$ первымъ отношеніемъ, $c : d$ вторымъ отношеніемъ.

Свойства пропорцій.

312. Теорема I.—*Во всякой пропорціи произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ.*

Возьмемъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Приведемъ обѣ дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ къ общему знаменателю, умножая оба члена первой на d и оба члена второй на b, получимъ

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}.$$

Эти двѣ дроби равны, имѣютъ общихъ знаменателей; стало быть и числители ихъ должны быть равны: слѣдовательно

$$a \times d = c \times b.$$

Примѣчаніе.—Эта теорема даетъ средства находить какой нибудь членъ пропорціи, зная три прочіе. Напримѣръ, если неизвѣстенъ членъ крайній, то его величина получится, перемноживъ извѣстные средніе и произведеніе раздѣливъ на извѣстный крайній.

313. Теорема II. — *Наоборотъ, если четыре числа написаны рядомъ и мы видимъ, что произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ, то эти четыре числа пропорціональны.*

Возьмемъ четыре числа

$$a,\ b,\ c,\ d,$$

и положимъ что

$$a \times d = b \times c.$$

Раздѣлимъ на $b \times d$ обѣ части этого равенства получимъ

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}.$$

Уничтожая общаго множителя d въ обоихъ членахъ первой дроби и множителя b въ обоихъ членахъ второй, получимъ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

314. Изъ предъидущихъ теоремъ заключаемъ, что во всякой пропорціи можно производить различныя перемѣщенія членовъ, не нарушая равенства между произведеніемъ среднихъ и произведеніемъ крайнихъ.

Или точнѣе, можно во всякой пропорціи: 1° перемѣнить мѣста среднихъ, или перемѣнить мѣста крайнихъ; 2° поставить средніе на мѣсто крайнихъ и наоборотъ. Такимъ

образомъ пропорція, существующая между четырьмя числами a, b, c, d, ибо $a \times d = b \times c$, можетъ быть написана *восемью* различными видами:

$$a : b = c : d,\ a : c = b : d;$$
$$d : b = c : a,\ d : c = b : a;$$
$$b : a = d : c,\ b : d = a : c;$$
$$c : a = d : b,\ c : d = a : b.$$

Видно также, что въ пропорціи можно множить или дѣлить на одно и тоже число одинъ изъ крайнихъ и одинъ изъ среднихъ членовъ.

315. Теорема III.—*Когда двѣ пропорціи имѣютъ по равному отношенію, то другія ихъ отношенія составятъ пропорцію.* Возмемъ двѣ пропорціи

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},\ \frac{a}{b} = \frac{e}{f},$$

то очевидно, что

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Слѣдствіе.—*Когда двѣ пропорціи имѣютъ одни и тѣ же предъидущіе или послѣдующіе, то изъ послѣдующихъ, или изъ предъидущихъ можно составить пропорцію.*

Возмемъ двѣ пропорціи

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ и } \frac{a}{e} = \frac{c}{f},$$

въ которыхъ предъидущіе одни и тѣ же. Перемѣняя мѣста среднихъ, будетъ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},\ \frac{a}{c} = \frac{e}{f},$$

откуда

$$\frac{b}{d} = \frac{e}{f}.$$

316. Теорема. IV.—*Во всякой пропорціи сумма двухъ первыхъ членовъ относится такъ къ суммѣ двухъ вторыхъ, какъ первый членъ относится къ третьему или второй къ четвертому.*

Возьмемъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdots\cdots\cdots (1)$$

По § 261 имѣемъ

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1;$$

точно также

$$\frac{c+d}{d} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} = \frac{c}{d} + 1;$$

слѣдовательно

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

или перемѣняя мѣста среднихъ

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} \cdots\cdots\cdots (2)$$

Съ другой стороны, если перемѣнить мѣста среднихъ въ (1) пропорціи, то получимъ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d};$$

эта пропорція и пропорція (2) имѣютъ вторыя отношенія равныя, а потому

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} \cdots\cdots\cdots (3)$$

Пропорціи (2) и (3) доказываютъ предложенную теорему.

Слѣдствіе.—*Во всякой пропорціи сумма предъидущихъ относится такъ къ суммѣ послѣдующихъ, какъ какой нибудь предъидущій относится къ своему послѣдующему.*

Возьмемъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

перемѣнивъ мѣста среднихъ, получимъ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

и приложивъ къ этой пропорціи послѣднюю теорему, получимъ

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}, \frac{a+e}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

317. Теорема V.—*Во всякой пропорціи разность двухъ первыхъ членовъ относится такъ къ разности двухъ вторыхъ, какъ первый членъ относится къ третьему, или второй къ четвертому.*

Возьмемъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Предположимъ, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ болѣе единицы. По § 262 имѣемъ

$$\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1,$$

точно также

$$\frac{c-b}{d} = \frac{c}{d} - 1;$$

поэтому

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

или перемѣняя мѣста среднихъ,

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Съ другой стороны перемѣнивъ мѣста среднихъ членовъ въ (1) пропорціи, получимъ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

тогда эта пропорція и пропорція (2) имѣютъ вторыя отношенія равныя, а потому

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} \cdot \cdots\cdots (3)$$

Пропорціи (2) и (3) доказываютъ предложенную теорему.

Примѣчаніе.—Объясненное доказательство предполагаетъ каждаго изъ предъидущихъ бо̀льшимъ своего послѣдующаго. Если же будетъ наоборотъ, то можно написать пропорцію слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

и привести ее къ виду

$$\frac{b-a}{d-c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{b-a}{d-c} = \frac{a}{c}.$$

Слѣдствіе.—*Во всякой пропорціи разность предъидущихъ такъ относится къ разности послѣдующихъ, какъ одинъ предъидущій къ своему послѣдующему.*

Возмемъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

перемѣнивъ въ ней мѣста среднихъ, получимъ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Приложивъ къ послѣдней пропорціи предъидущую теорему найдемъ, если a будетъ $> c$, что

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d},$$

а если a будетъ $< c$;

$$\frac{c-a}{d-b} = \frac{a}{b}, \quad \frac{c-a}{d-b} = \frac{c}{d}.$$

318. Теорема. VI.—*Во всякой пропорціи сумма двухъ первыхъ членовъ такъ относится къ своей разности, какъ сумма двухъ вторыхъ членовъ къ своей разности.*

Возмемъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Основываясь на §§ 316 и 317, приводимъ ихъ въ слѣдующій видъ, полагая, что $a > b$,

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{a}{c}, \quad \frac{a - b}{c - d} = \frac{a}{c},$$

откуда

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d},$$

а перемѣняя мѣста среднихъ,

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}.$$

Если же $a < b$, то разсужденіемъ подобнымъ прежнему, мы выведемъ пропорцію

$$\frac{a + b}{b - a} = \frac{c + d}{d - c}.$$

Слѣдствіе. — *Во всякой пропорціи сумма предыдущихъ такъ относится къ своей разности, какъ сумма послѣдующихъ къ своей разности.*

Возьмемъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

перемѣняя въ ней мѣста среднихъ, получимъ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Прилагая къ этой послѣдней предъидущую теорему, получимъ, если $a > c$,

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d},$$

а если $a < c$

$$\frac{a + c}{c - a} = \frac{b + d}{b - d}.$$

319. Теорема VII. — *Когда перемножимъ почленно нѣсколько пропорцій, то четыре полученныя произведенія составятъ новую пропорцію.*

Возмемъ три пропорціи

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}, \frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''};$$

перемноживъ получимъ

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} = \frac{c}{d} \times \frac{c'}{d'} \times \frac{c''}{d''},$$

или

$$\frac{aa'a''}{bb'b''} = \frac{cc'c''}{dd'd''}.$$

320. Теорема. VIII. — *Если раздѣлимъ нѣсколько пропорцій почленно, то четыре полученныхъ частныхъ составятъ новую пропорцію.*

Возмемъ двѣ пропорціи

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'},$$

раздѣляя ихъ почленно, получимъ

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a'}{b'}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{d}\right)}{\left(\frac{c'}{d'}\right)},$$

или

$$\frac{ab'}{a'b} = \frac{cd'}{c'b}$$

или наконецъ

$$\frac{\left(\frac{a}{a'}\right)}{\left(\frac{b}{b'}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{c'}\right)}{\left(\frac{d}{d'}\right)}$$

321. Теорема IX.—*Если четыре числа между собою пропорціональны, то и одинаковыя степени ихъ также будутъ между собою пропорціональны.*

Возмемъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Обѣ части возведемъ, напримѣръ, въ m-ую степень, получимъ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{d}{c}\right)^m,$$

или

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}.$$

322. Теорема X.—*Если четыре числа пропорціональны между собою, то и ихъ корни, одной и той же степени, будутъ пропорціональны между собою.*

Возмемъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Извлекая корень m-ой степени изъ обѣихъ частей, получимъ

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}},$$

или

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}.$$

Ряды равныхъ отношеній.

323. Теорема. — *Во всякомъ ряду равныхъ отношеній сумма предъидущихъ такъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ какой нибудь предъидущій къ своему послѣдующему.*

Разсмотримъ рядъ равныхъ отношеній

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''}.$$

Обозначимъ чрезъ q общую величину этихъ отношеній. Равенства

$$\frac{a}{b} = q, \frac{a'}{b'} = q,$$

(§ 316, слѣдствіе) приведемъ къ виду

$$\frac{a+a'}{b+b'} = q;$$

съ равенствами

$$\frac{a+a'}{b+b'} = q, \quad \frac{a''}{b''} = q,$$

сдѣлаемъ тоже самое

$$\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''} = q,$$

и т. д. Поэтому отношеніе суммы какого нибудь числа предъидущихъ къ суммѣ ихъ послѣдующихъ равно каждому изъ данныхъ отношеній.

324. Эта теорема позволяетъ непосредственно рѣшить слѣдующій вопросъ.

Задача. — *Раздѣлить какое нибудь число на части пропорціональныя даннымъ числамъ, т. е. на части, отношенія которыхъ къ даннымъ числамъ равны между собою.*

Положимъ, напримѣръ, что требуется раздѣлить 8 на части пропорціональныя числамъ 2, 3, 4. Слѣдовательно требуется найти три числа x, y, z, такія, чтобы.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \ldots\ldots\ldots (1)$$

и чтобы въ тоже время

$$x + y + z = 8.$$

Каждое изъ отношеній (1) равно (§ 323) $\frac{x+y+z}{2+3+4}$ или равно $\frac{8}{9}$. Поэтому

$$\frac{x}{2} = \frac{8}{9}, \frac{y}{3} = \frac{8}{9}, \frac{z}{4} = \frac{8}{9},$$

откуда

$$x = \frac{16}{9}, y = \frac{24}{9}, z = \frac{32}{9}.$$

325. Предположимъ вообще, что требуется раздѣлить какое нибудь число N на части пропорціональныя даннымъ числамъ $a, b, c, \ldots\ldots$ Слѣдовательно, требуется найти числа $x, y, z, \ldots\ldots$ такія чтобы

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots\ldots, \ldots\ldots \quad (2)$$

$$x + y + z + \ldots\ldots = N$$

Каждое изъ отношеній (2) равно (§ 323)

$\frac{x+y+z+\ldots\ldots}{a+b+c+\ldots\ldots}$, или равно $\frac{N}{a+b+c+\ldots}$. Поэтому

$\frac{x}{a} = \frac{N}{a+b+c+\ldots\ldots}, \frac{y}{b} = \frac{N}{a+b+c+\ldots\ldots}, \frac{z}{c} = \frac{N}{a+b+c+\ldots\ldots}\ldots;$

откуда

$x = \frac{aN}{a+b+c+\ldots}, y = \frac{bN}{a+b+c+\ldots}, z = \frac{cN}{a+b+c+\ldots}. \ldots\ldots$

Среднія для двухъ или нѣсколькихъ чиселъ.

326. Когда въ пропорціи средніе члены равны, то одинъ изъ нихъ называется *среднимъ пропорціональнымъ* или *среднимъ геометрическимъ* для крайнихъ. Напримѣръ, имѣя,

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9},$$

6 есть среднее пропорціональное число для чиселъ 4 и 9.

Пусть x будетъ среднее пропорціональное для двухъ чиселъ a и b.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

слѣдовательно

$$x^2 = a \times b, \text{ откуда } x = \sqrt{ab}.$$

Эта доказываетъ, что

Среднее пропорціональное для двухъ чиселъ есть корень квадратный изъ произведенія этихъ чиселъ.

327. Вообще среднимъ нѣсколькихъ чиселъ называется всякое число заключающееся между наибольшимъ и наименьшимъ изъ нихъ.

Часто встрѣчается среднее, которое называется *среднимъ ариѳметическимъ*. Среднее ариѳметическое для m чиселъ есть результатъ, полученный отъ раздѣленія на m суммы этихъ чиселъ.

Упражненія.

1. Доказать, что одна изъ пропорцій

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{ma + nb}{pa - qb} = \frac{mc + nd}{pc - qd}$$

есть слѣдствіе другой.

2. Доказать, что если четыре члена одной пропорціи написаны по порядку ихъ величинъ, одинъ за другимъ, то сумма крайнихъ будетъ болѣе суммы среднихъ.

3. Доказать, что если имѣемъ $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, и что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, будутъ пропорціональны числамъ $b_1, b_2, \ldots, b_n$; то

$$\sqrt{AB} = \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n}.$$

4. Доказать, что въ ряду равныхъ отношеній квадратный корень изъ суммы квадратовъ предъидущихъ относится къ квадратному корню изъ суммы квадратовъ послѣдующихъ, какъ какой нибудь предъидущій къ своему послѣдующему.

5. Доказать, что четыре суммы, полученныя отъ сложенія двухъ пропорцій почленно, образуютъ пропорцію только въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ:

1°. Если отношенія первой пропорціи будутъ равны отношеніямъ второй;

2°. Если отношеніе предъидущихъ или послѣдующихъ первой будутъ равны отношенію предъидущихъ или послѣдующихъ второй.

6. Доказать что $\sqrt[m+n+p]{a\,b\,c}$ есть средняя для числъ $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$.

ГЛАВА II.

ТЕОРІЯ ПРОГРЕССІЙ.

Прогрессіи Ариѳметическія. — Вставка среднихъ чиселъ между двумя данными числами. — Сумма членовъ прогрессіи ариѳметической. — Прогрессіи Геометрическія. — Вставка среднихъ чиселъ между двумя данными числами. — Произведеніе членовъ прогрессіи геометрической. — Сумма членовъ прогрессіи геометрической. — Предѣлъ суммы членовъ прогрессіи геомегрической, когда число этихъ членовъ увеличивается неопредѣленно.

Ариѳметическія прогрессіи.

328. *Ариѳметическою прогрессіею* называется рядъ такихъ чиселъ, у которыхъ разность, между каждымъ изъ нихъ и предъидущимъ, постоянна. Эта разность называется *разностію* прогрессіи.

Такимъ образомъ числа

3, 5, 7, 9, 11, 13,

составляютъ прогрессію, у которой разность есть 2.

Въ этомъ примѣрѣ члены идутъ возрастая и прогрессія называется *возрастающею*. Эти члены можно также написать въ обратномъ порядкѣ и тогда получимъ прогрессію *убывающую*. Такъ

13, 11, 9, 7, 5, 3,

есть прогрессія убывающая.

329. Теорема.—*Каждый членъ прогрессіи ариѳметической возрастающей равенъ первому члену сложенному съ разностью, взятой столько разъ сколько имѣется членовъ до члена опредѣляемаго или равенъ послѣднему члену безъ разности, взятой столько сколько всѣхъ членовъ послѣ члена опредѣляемаго.*

Возьмемъ ариѳметическую прогрессію.

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots\ g,\ h,\ k,\ l,$$

разность которой мы обозначимъ δ.

1°. Изъ опредѣленія мы знаемъ, что.

$$b = a + \delta,\ c = b + \delta,\ d = c + \delta, \ldots\ldots,$$

или

$$b = a + \delta,\ c = a + 2\delta,\ d = a + 3\delta, \ldots\ldots,$$

а изъ всего этого видно, что *каждый членъ равенъ первому сложенному съ разностію взятой столько разъ сколько было членовъ до члена опредѣляемаго.*

Если обозначимъ чрезъ n число всѣхъ членовъ въ прогрессіи, то послѣдній ея членъ

$$l = a + (n - 1)\ \delta.$$

2°. Точно также по опредѣленію

$$k = l - \delta,\ h = k - \delta,\ g = h - \delta, \ldots\ldots,$$

или

$$h = l - \delta,\ h = l - 2\delta,\ g = l - 3\delta \ldots\ldots;$$

изъ чего видно, что *каждый членъ равенъ послѣднему безъ разности взятой столько разъ сколько было членовъ послѣ члена опредѣляемаго.*

Обозначивъ чрезъ n число всѣхъ членовъ прогрессіи, тогда первый ея членъ

$$a = l - (n - 1)\ \delta.$$

Слѣдствіе.—*Въ ариѳметической прогрессіи сумма двухъ членовъ, имѣющихъ равныя удаленія отъ членовъ крайнихъ, равна суммѣ крайнихъ.*

Возмемъ возврастающую прогрессію

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots\ g,\ h,\ k,\ l,$$

разность которой δ. Разсмотримъ, напримѣръ, членъ d, имѣющій предъ собою три члена и членъ g, имѣющій за собою три члена; мы знаемъ, что

$$b = a + 3\delta,\ g = l - 3\delta.$$

Сложивъ эти два равенства почленно, получимъ

$$d + g = a + 3\delta + l - 3\delta,$$

или

$$d + g = a + l.$$

Вставка среднихъ между двумя данными числами.

330. Вставить n среднихъ между двумя данными числами a и l, значитъ, составить ариѳметическую прогрессію содержащую $n+2$ членовъ, въ которой a и l будутъ членами крайними, n промежуточныхъ членовъ будутъ средними вставочными.

Пусть δ будетъ разность неизвѣстной прогрессіи. Такъ какъ передъ послѣднимъ членомъ l должно быть $n+1$ членовъ, то предполагая $l > a$ будетъ:

$$l = a + (n+1)\,\delta,$$

откуда

$$l - a = (n+1)\,\delta;$$

а слѣдовательно

$$\delta = \frac{l-a}{n+1}.$$

Поэтому разность искомой прогрессіи равна разности данныхъ чиселъ, раздѣленной на число среднихъ членовъ, увеличенное единицею.

Опредѣливъ такимъ образомъ разность, искомая прогрессія будетъ

$$a,\ a+\delta,\ a+2\delta,\ \ldots\ldots\ a+n\delta,\ l..$$

Примѣръ.—Требуется вставить 11 среднихъ между 13 и 133. Имѣемъ

$$a = 13,\ l = 133,\ n = 11,\ \delta = \frac{133-13}{11+1} = \frac{120}{12} = 10;$$

тогда искомая прогрессія будетъ

13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 103, 113, 123, 133.

331. Теорема I.—*Дана какая нибудь ариѳметическая прогрессія, если вставить одно и тоже число среднихъ между каждымъ ея членомъ и слѣдующимъ, то полученный вновь рядъ будетъ тоже прогрессія ариѳметическая.*

Возмемъ возрастающую прогрессію

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots\ g,\ h,\ k,\ l,$$

разность которой есть δ и предположимъ, что вставлено по n членовъ между каждымъ членомъ прогрессіи и слѣдующимъ. Тогда отъ этаго образуются отдѣльныя прогрессіи, разности которыхъ

$$\frac{b-a}{n+1}, \frac{c-b}{n+1}, \ldots\ldots \frac{l-k}{n+1}.$$

будутъ всѣ равны $\frac{\delta}{n+1}$; кромѣ того, послѣдній членъ въ каждой отдѣльной прогрессіи есть первый членъ слѣдующей; поэтому совокупность этихъ прогрессій образуетъ тоже ариѳметическую прогрессію.

332. Теорема II.— *Чтобы вставить между двумя данными числами число среднихъ равное* $pp'-1$, *можно:* 1^0 *вставить* $p-1$ *среднихъ между данными числами;* 2^0 *вставить* $p'-1$ *среднихъ между каждымъ изъ членовъ и слѣдующимъ въ полученной прогрессіи.*

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что вставлено $p-1$ среднихъ между числами a и $l > a$. Разность полученной прогрессіи будетъ

$$\frac{l-a}{p}.$$

Предположимъ теперь, что вставлено $p'-1$ среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ полученной прогрессіи; то образуется новая ариѳметическая прогрессія, разность которой будетъ (§ 331)

$$\frac{\left(\frac{l-a}{p}\right)}{p'} \text{ или } \frac{l-a}{pp'}.$$

Но такъ какъ эта разность таже, какая бы получилась вставляя $pp'-1$ среднихъ между числами a и l, то теорема доказана.

Слѣдствіе I.— *Чтобы вставить между двумя данными числами число среднихъ равное* $pp'p''\ldots.-1$, *можно:* 1^0 *вставить* $p-1$ *среднихъ между данными числами;* 2^0 *вставить* $p'-1$ *среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ прогрессіи полученной;* 3^0 *вставить* $p''-1$ *среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ во вторично полученной прогрессіи; и т. д.*

Положимъ, напримѣръ, что требуется вставить $pp'p''-1$ среднихъ между двумя даннымъ числами. По предъидущей теоремѣ, можно: 1^0 вставить $p-1$ среднихъ между данными числами; 2^0 вставить $p'p''-1$ среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ полученной прогрессіи. Но это второе дѣйствіе, по той же теоремѣ, приводитъ къ вставкѣ сначала $p'-1$, а потомъ $p''-1$ среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующихъ во вновь получаемыхъ прогрессіяхъ.

Примѣчаніе.—Говоря въ частности, чтобы вставить между двумя данными числами, число среднихъ равное какой нибудь степени 2 уменьшенной единицею, или, что тоже, равное 2^n-1, можно вставить одинъ средній между данными числами, потомъ одинъ средній между каждымъ членомъ и слѣдующими въ полученной прогрессіи и т. д. до тѣхъ поръ пока подобное дѣйствіе повторится n разъ.

Слѣдствіе II.—*Числа вводимыя въ ариѳметическую прогрессію вставляя* $p-1$ *среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ и числа вводимыя въ ту же прогрессію вставляя* $p'-1$ *среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ, могутъ быть одновременно введены въ прогрессію вставляя* $pp'-1$ *среднихъ.*

Дѣйствительно, чтобы вставить $pp'-1$ среднихъ между различными членами прогрессіи ариѳметической, можно начинать со вставки $p-1$ или $p'-1$ среднихъ, послѣ чего останется только вставить $p'-1$ или $p-1$ среднихъ между различными членами вновь полученной прогрессіи.

Сумма членовъ прогрессіи ариѳметической.

333. Возьмемъ ариѳметическую прогрессію

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots g,\ h,\ k,\ l.$$

Обозначимъ чрезъ S сумму всѣхъ ея членовъ, а чрезъ n число этихъ членовъ, тогда

$$(1)\quad S=a+b+c+d+\ \ldots\ldots +g+h+k+l,$$

написавши это обратно

$$(2)\quad S=l+k+h+g+\ \ldots\ldots d+c+b+a.$$

Сложивъ равенства (1) со (2) получимъ

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+h)+\ \ldots\ldots +(k+b)+(l+a).$$

Каждая изъ скобокъ во второй части представляетъ сумму крайнихъ, или сумму двухъ равноудаленныхъ членовъ отъ крайнихъ, слѣдовательно равную суммѣ же крайнихъ; поэтому

$$2S=(a+l)\times n$$

откуда

$$S=\frac{(a+l)\ n}{2}.$$

Такимъ образомъ, *сумма членовъ прогрессіи ариѳметической равна полу-суммѣ крайнихъ умноженной на число членовъ.*

Примѣръ I. Опредѣлить сумму n первыхъ цѣлыхъ чиселъ. Для этого должно опредѣлить сумму членовъ слѣдующей ариѳметической прогрессіи.

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots\ldots,\ n-1,\ n.$$

Первый ея членъ 1, послѣдній n, число членовъ также равно n, поэтому искомая сумма будетъ

$$\frac{n\ (n+1)}{2}.$$

Примѣръ II.—Найти сумму n первыхъ чиселъ нечетныхъ. Для этаго должно опредѣлить сумму членовъ ариѳметической прогрессіи въ которой первый членъ есть 1, разность 2, число членовъ n. Послѣднимъ членомъ будетъ $1+2\ (n-1)$ или $2n-1$ (§ 329). Искомая сумма будетъ равна $\frac{2n\times n}{2}$ или равна n^2. Такимъ образомъ.

Сумма n *первыхъ нечетныхъ чиселъ равна* n^2.

Прогрессіи геометрическія.

334. Прогрессіею *геометрическою* называется рядъ такихъ чиселъ, въ которомъ частное отъ дѣленія каждаго числа на предъидущее постоянно. Это постоянное частное называется *знаменателемъ* прогрессіи.

Прогрессія бываетъ *возрастающая* или *убывающая* смотря потому бываетъ ли знаменатель прогрессіи болѣе или менѣе единицы. Такъ

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,$$

есть геометрическая прогрессія возрастающая, знаменатель которой 2;

$$3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},$$

есть геометрическая прогрессія убывающая, знаменатель который $\frac{1}{2}$.

Примѣчаніе.—Каждый членъ геометрической прогрессіи есть средній пропорціональный между предъидущимъ и послѣдующимъ членами.

Дѣйствительно, возьмемъ геометрическую прогрессію

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots g,\ h,\ k,\ l$$

основываясь на опредѣленіи мы имѣемъ, что

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\ldots\ldots$$

335. Теорема.—*Каждый членъ геометрической прогрессіи равенъ первому умноженному на степень частнаго, имѣющую показателемъ число предшествующихъ членовъ, и равенъ послѣднему раздѣленному на степень частнаго, имѣющую показателемъ число послѣдующихъ членовъ.*

Возмемъ геометрическую прогрессію

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots\ldots g,\ h,\ k,\ l,$$

частное которой обозначимъ чрезъ q.

1°. По опредѣленію имѣемъ

$$b=a\times q,\ c=b\times q,\ d=c\times q,\ldots\ldots$$

или

$$b=a\times q,\ c=a\times q^2,\ d=a\times q^3,\ldots\ldots$$

изъ чего видно, *что каждый членъ равенъ первому умноженному на степень частнаго, имѣющую показателемъ число предшествовавшихъ членовъ.*

Если чрезъ n обозначимъ число всѣхъ членовъ прогрессіи, чрезъ l послѣдній членъ, то

$$l=a\times q^{n-1}$$

2°. Также по опредѣленію

$$k=\frac{l}{q},\ h=\frac{k}{q},\ g=\frac{h}{q},\ldots\ldots$$

или

$$k=\frac{l}{q},\ h=\frac{l}{q^2},\ g=\frac{l}{q^3},\ldots\ldots$$

изъ этаго слѣдуетъ, что *каждый членъ равенъ послѣднему раздѣленному на степень частнаго, имѣющую показателемъ число послѣдующихъ членовъ.*

Слѣдствіе.—*Во всякой геометрической прогрессіи произведеніе двухъ членовъ равноотстоящихъ отъ крайнихъ равно произведенію крайнихъ.*

Возьмемъ прогрессію

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots\ldots g,\ h,\ k,\ l,$$

частное которой есть q. Разсмотримъ, напримѣръ членъ d имѣющій предъ собою три члена и членъ g имѣющій послѣ себя три члена. Въ ней,

$$d = a \times q^3, \qquad g = \frac{l}{q^3},$$

перемножая эти равенства почленно, получимъ

$$d \times g = \frac{a \times q^3 \times l}{q^3} = a \times l.$$

Вставка среднихъ между двумя данными числами.

336. Вставить n среднихъ между двумя данными a и l, значитъ, составить геометрическую прогрессію состоящую изъ $n + 2$ членовъ, въ которой a и l будутъ членами крайними.

Пусть q будетъ частное искомой прогрессіи, такъ какъ до l должно быть $n+1$ членовъ, то (§ 335)

$$l = a \times q^{n+1},$$

откуда

$$\frac{l}{a} = q^{n+1};$$

слѣдовательно

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{l}{a}}.$$

Стало быть, частное искомой прогрессіи равно корню $\frac{l}{a}$ частнаго данныхъ чиселъ, имѣющему показателемъ число вставочныхъ среднихъ членовъ, увеличенное единицею.

Опредѣливъ такимъ образомъ частное q, искомая прогрессія будетъ

$$a,\ a \times q,\ a \times q^2,\ a \times q^3,\ \ldots\ldots,\ a \times q^n,\ l.$$

337. Теорема I. — *Если вставить одно и тоже число среднихъ между каждымъ изъ членовъ и слѣдующимъ въ данной прогрессіи, то полученный новый рядъ будетъ также геометрической прогрессіей.*

Возмемъ прогрессію

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots,\ g,\ h,\ k,\ l,$$

въ которой разность есть q, и предположимъ, что въ нее вставлено n среднихъ, между каждымъ изъ членомъ и слѣдующимъ.

Образовавшіяся отъ этого отдѣльныя прогрессіи будутъ имѣть частныя

$$\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}},\quad \sqrt[n+1]{\frac{c}{b}},\quad \ldots,\quad \sqrt[n+1]{\frac{l}{k}},$$

которыя всѣ будутъ равны $\sqrt[n+1]{q}$. Но, съ другой стороны, такъ какъ послѣдній членъ въ каждой изъ этихъ отдѣльныхъ прогрессій есть первый для слѣдующей, то совокупность такихъ прогрессій составитъ одну геометрическую прогрессію.

338. Теорема II. — *Чтобы вставить между двумя данными числами число среднихъ равное* $pp'-1$, *можно*: 1^0 *вставить* $p-1$ *среднихъ между двумя данными числами*; 2^0 *вставить* $p'-1$ *среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ полученной прогрессіи.*

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что вставлено $p-1$ среднихъ между данными числами a и l. Частное полученной прогрессіи будетъ

$$\sqrt[p]{\frac{l}{a}}.$$

Предположимъ теперь, что вставлено $p'-1$ среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ послѣдней прогрессіи, то образуется новая прогрессія, которой частное будетъ

$$\sqrt[p']{\sqrt[p]{\frac{l}{a}}} \text{ или } \sqrt[p'p]{\frac{l}{a}}$$

Но это частное точно тоже, какое бы мы получили, вставивъ $p'p-1$ среднихъ между числами a и l; тѣмъ самымъ теорема и доказано.

Слѣдствіе I. — *Чтобы вставить между двумя числами число среднихъ равное* $pp'p''-1$, *можно*: 1^0 *вставить* $p-1$ *среднихъ*

между данными числами; 2° *вставить* $p'-1$ *среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ полученной прогрессіи*; 3° *вставить* $p''-1$ *среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ во вторично полученной прогрессіи и т. д.*

Предположимъ, напримѣръ, что требуется вставить $pp'p''-1$ членовъ между двумя числами. По предъидущей теоремѣ, можно: 1° вставить $p-1$ среднихъ между двумя данными числами; 2° вставить $p'p''-1$ среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ полученной прогрессіи. Но, по предъидущей же теоремѣ, послѣднее можно сдѣлать вставивъ сначала $p'-1$ среднихъ, а потомъ $p''-1$ среднихъ межу каждымъ членомъ и слѣдующимъ во вновь полученной прогрессіи.

Примѣчаніе.—Чтобы вставить между двумя данными числами число среднихъ равное степени 2 уменьшенной единицею, т. е. равное 2^n-1, можно вставить сначала одинъ средній между двумя данными числами, потомъ еще по одному среднему между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ полученной прогрессіи и т. д. пока подобное дѣйствіе повторится n разъ.

Очевидно, что вставка 2^n-1 среднихъ между двумя данными числами, состоитъ въ томъ, что вставляютъ нѣсколько разъ одинъ средній между двумя данными числами; это неиначе можетъ быть достигнуто, какъ извлеченіемъ квадратнаго корня.

Слѣдствіе II.—*Числа, которыя вводятъ въ какую нибудь геометрическую прогрессію, чрезъ вставку* $p-1$ *среднихъ между каждымъ ея членомъ и слѣдующими, и числа, которыя вводятъ въ ту же прогрессію чрезъ вставку* $p'-1$ *среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ, могутъ быть введены одновременно въ прогрессію чрезъ вставку* $pp'-1$ *среднихъ членовъ.*

Дѣйствительно, чтобы вставить $pp'-1$ среднихъ между различными членами геометрической прогрессіи, можно начинать вставлять сначала $p-1$ или $p'-1$ среднихъ послѣ чего останется только вставить $p'-1$ или $p-1$ среднимъ между различными членами вновь полученной прогрессіи.

Произведеніе членовъ геометрической прогрессіи.

339. Возьмемъ геометрическую прогрессію

$$a,\ b,\ c,\ d,,\ldots\ldots,g,\ h,\ k,\ l.$$

Обозначимъ чрезъ P произведеніе всѣхъ ея членовъ и чрезъ n число этихъ членовъ, получимъ

$$(1)\quad P=a\times b\times c\times d\times\ldots\ldots\times g\times h\times k\times l.$$

или, написавши множители въ обратномъ порядкѣ,

$$(2)\quad P=l\times k\times h\times g\times\ldots\ldots\times d\times c\times b\times a.$$

Перемноживъ равенства (1) и (2), получимъ.

$$P^2=(a\times l)\times(b\times k)\times(c\times h)\times\ldots\ldots\times(k\times b)\times(l\times a).$$

Каждая изъ n скобокъ второй части представляетъ произведеніе крайнихъ, или произведеніе членовъ равноудаленныхъ отъ крайнихъ, равняющееся произведенію крайнихъ, поэтому

$$P^2=(a\times l)^n,$$

или

$$P=\sqrt{(a\times l)^n}.$$

Такимъ образомъ *произведеніе членовъ всякой геометрической прогрессіи равно квадратному корню изъ произведенія крайнихъ, возвышеннаго въ степень, показатель которой равенъ числу членовъ.*

Сумма членовъ геометрической прогрессіи.

340. Возьмемъ геометрическую прогрессію

$$a,\ c,\ d,\ldots\ldots,g,\ h,\ k,\ l.$$

Обозначимъ чрезъ q частное этой прогрессіи, а чрезъ S сумму ея членовъ, получимъ

$$(1)\quad S=a+b+c+d+\ldots\ldots+g+h+k+l.$$

Если умножимъ эту сумму на q, зная, что произведеніе каждаго члена на частное равно слѣдующему члену, получимъ

$$(2)\quad Sq=b+c+d+\ldots\ldots h+k+lq.$$

Послѣ того, предположивъ сначала, что $q > 1$ и, вычитая изъ (2) равенства (1), найдемъ что

$$Sq - S \text{ или } S(q-1) = lq - a,$$

откуда

$$S = \frac{lq-a}{q-1} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Теперь предположимъ, что $q < 1$, тогда вычитая равенство (2) изъ (1), будетъ

$$S - Sq \text{ или } S(1-q) = a - lq$$

$$S = \frac{a-lq}{1-q} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Формулы (3) и (4), относящіяся, первая къ прогрессіи возрастающей а вторая къ прогрессіи убывающей, показываютъ, что

Для полученія суммы членовъ геометрической прогрессіи должно взять разность между первымъ членомъ и произведеніемъ втораго члена на частное и результатъ раздѣлить на разность между единицею и частнымъ.

341. Пусть N будетъ число членовъ данной геометрической прогрессіи; тогда $l = aq^{n-1}$. Если замѣнимъ l равною величиною, то вмѣсто равенствъ (3) и (4) получимъ

$$S = \frac{aq^n - a}{q-1} \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$S = \frac{a - aq^n}{1-q} \ldots\ldots\ldots (6)$$

Примѣръ I.—Требуется найти сумму чиселъ

$$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\ldots, 2^{10}.$$

Эти числа образуютъ геометрическую прогрессію, первый членъ есть 1, частное 2, число членовъ 11. Равенство (5)

$$S = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2047.$$

Примѣръ II.—Требуется найти сумму чиселъ

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{2^{10}},$$

Эти числа образуютъ геометрическую прогрессію въ которой: первый членъ есть 1, частное $\frac{1}{2}$ число членовъ 11.

Равенство (6) даетъ

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2^{11}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) = 2\,\frac{2^{11}-1}{2^{11}} = \frac{2^{11}-1}{2^{10}} = \frac{2047}{1025}.$$

Предѣлъ суммы членовъ геометрической прогрессіи, когда число этихъ членовъ увеличивается неопредѣленно.

242. Часто приходится разсматривать прогрессіи въ которыхъ число членовъ неограниченно. Пусть a будетъ первый членъ и q разность какой нибудь геометрической прогрессіи.

$$a,\ aq,\ aq,^2\ aq^3,\ldots\ldots,$$

въ которой число членовъ неограниченно. Предложимъ же себѣ опредѣлить, какъ измѣняется сумма n первыхъ членовъ этой прогрессіи, когда число n увеличивается неопредѣленно. Это изслѣдованіе основано на слѣдующихъ двухъ теоремахъ.

343. Теорема I.—*Послѣдовательныя степени числа q бо́льшаго единицы, постоянно возрастая, могутъ подъ конецъ превысить всякое данное число.*

Пусть число q будетъ болѣе 1; положимъ

$$q = 1 + \alpha.$$

Умножая обѣ части на q^m, получимъ

$$q^{m+1} = q^m + \alpha q^m;$$

но $q > 1$, то и q^m также будетъ больше единицы, слѣдовательно αq^m будетъ $> \alpha$, тогда изъ послѣдняго равенства найдемъ, что

$$q^{m+1} > q^m + \alpha.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что каждая степень q превышаетъ степень предъидущую на какое нибудь число большее чѣмъ α. Принявъ это, при $q = 1 + \alpha$, будемъ имѣть

$$q^2 > 1 + 2\alpha,\ q^3 > 1 + 3\alpha,\ q^4 > 1+4\alpha,\ldots\ldots,q^n > 1+n\alpha.$$

Но цѣлое n можно принять настолько большимъ, что $1+n\alpha$ будетъ превышать какое нибудь данное число k; тогда дѣйствительно будетъ, что

$$q^n > k.$$

344. Теорема II.—*Послѣдовательныя степени числа* q *меньшаго единицы сдѣлаются подъ конецъ менѣе всякаго даннаго числа.*

Я говорю, что число n можно сдѣлать на столько большимъ, что q^n будетъ $< \kappa$, какъ бы ни было мало самое данное число κ. Дѣйствительно, $q < 1$, то $\frac{1}{q}$ будетъ > 1, тогда число n можно будетъ принять на столько большимъ, что по (§ 343) будетъ

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n > \frac{1}{k},$$

или

$$\frac{1}{q^n} > \frac{1}{k},$$

т. е.

$$q^n < k.$$

Примѣчаніе.—Обѣ теоремы могутъ быть выражены такъ: *послѣдовательныя степени числа большаго единицы возрастаютъ до всякаго предѣла, а послѣдовательныя степени числа меньшаго единицы имѣютъ предѣломъ нуль.*

345. Возмемъ теперь безконечную прогрессію

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ldots\ldots$$

и обозначимъ чрезъ S сумму n первыхъ ея членовъ.

1°. Если $q > 1$, то члены прогрессіи возрастаютъ до всякаго предѣла; слѣдовательно S_n возрастетъ также до всякаго предѣла, если n увеличивать неопредѣленно.

2°. Если $q < 1$, то величина

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

или

$$S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Очевидно, что

$$S_n < \frac{a}{1-q};$$

сверхъ того разность S_n и $\frac{a}{1-q}$ выражается величиною $\frac{aq^n}{1-q}$ или $\frac{a}{1-q} \times q^n$. Множитель q^n постоянно стремится приблизиться къ нулю, по мѣрѣ того какъ n увеличивается; поэтому тоже будетъ и съ произведеніемъ $\frac{a}{1-q} \times q^n$. Слѣдовательно S_n имѣетъ предѣломъ $\frac{a}{1-q}$. Изъ этаго замѣчаемъ, что

Сумма n *первыхъ членовъ геометрической убывающей прогрессіи имѣетъ предѣломъ первый членъ, раздѣленный на единицу безъ частнаго, если цѣлое* n *постоянно будетъ увеличиваться.*

Примѣръ.—Найти предѣлъ суммы членовъ прогрессіи

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots\ldots$$

въ которой частное есть $\frac{1}{2}$. Для этого предѣла имѣемъ $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ или $\frac{2}{2-1}$ или 2.

346. Дробь десятичная періодическая не смѣшанная есть сумма членовъ прогрессіи геометрической уменьшающейся безпредѣльно, или, какъ говорятъ, прогрессіи геометрической *безконечно убывающей*.

Возьмемъ для примѣра дробь десятичную періодическую несмѣшанную.

$$0,267267267\ldots\ldots\ldots$$

и обозначимъ чрезъ x ея предѣлъ. Имѣемъ

$$x = \frac{267}{1000} + \frac{267}{1000} \times \frac{1}{1000} + \frac{267}{1000} \times \frac{1}{1000^2} + \ldots\ldots;$$

поэтому x есть сумма членовъ геометрической прогрессіи безконечно убывающей, въ которой первый членъ есть $\frac{267}{1000}$ и частное $\frac{1}{1000}$; слѣдовательно получимъ

$$x = \frac{\left(\frac{267}{1000}\right)}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{\left(\frac{267}{1000}\right)}{\left(\frac{999}{1000}\right)} = \frac{267}{999}.$$

Результатъ тотъ же, какой былъ полученъ въ § 210.

Точно также, десятичная періодическая смѣшанная дробь равна непериодической части увеличенной суммою членовъ прогрессіи геометрической безконечно убывающей.

Возьмемъ, напримѣръ, десятичную дробь

$$0{,}34267267267\ldots\ldots$$

и обозначимъ чрезъ x ея предѣлъ получимъ .

$$x = \frac{34}{100} - \left(\frac{267}{100000} + \frac{267}{100000} \times \frac{1}{1000} + \frac{267}{100000} \times \frac{1}{1000^2} + \ldots\ldots\right),$$

или

$$x = \frac{34}{100} + \frac{\left(\frac{267}{100000}\right)}{\frac{1000-1}{1000}} = \frac{34}{100} + \frac{267}{(1000-1)\times 100} = \frac{34000-34}{(1000-1)\times 100} +$$

$$\frac{267}{(1000-1)\times 100} = \frac{34267-34}{99900}$$

Это тотъ же результатъ, какой былъ полученъ въ § 212.

Упражненія.

1. Доказать, что если въ прогрессіи геометрической взять четыре члена такихъ, чтобы между первымъ и вторымъ находилось сколько же членовъ сколько между третьимъ и четвертымъ, то эти четыре члена составятъ новую прогрессію.

2. Составить ариѳметическую прогрессію, часть которой составляютъ данныя числа a, b, c, и т. д.

3. Найти сумму n первыхъ членовъ ряда

$$q,\ 2q^2,\ 3q^3,\ 4q^4,\ldots\ldots,nq^n.$$

4. Доказать, что квадратъ суммы n первыхъ цѣлыхъ чиселъ равенъ суммѣ кубовъ тѣхъ же чиселъ.

Сначала доказать эту теорему при $n=1$, $n=2$, потомъ указать, что эта теорема вѣрна и при $n=p$, а также и при $n=p+1$, и изъ этаго вывести доказательство.

5. Доказать, что сумма n первыхъ членовъ въ суммѣ

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\ldots\ldots\ldots$$

менѣе чѣмъ 3, каково бы ни было n.

6. Доказать, что въ томъ же ряду сумма столькихъ членовъ сколько пожелаютъ, взятыхъ между тѣми, которые слѣдуютъ за n-вымъ, менѣе чѣмъ n-ная часть этаго n-наго члена.

ГЛАВА III.

ТЕОРІЯ ЛОГАРИѲМОВЪ.

Опредѣленіе логариѳмовъ.—Основныя свойства логариѳмовъ.—Различныя системы логариѳмовъ.—Логариѳмы Бригга. Таблицы логариѳмовъ.—Устройство таблицъ Лаланда.—Употребленіе таблицъ.—Приложенія теоріи логариѳмовъ.—Употребленіе отрицательной характеристики.

Опредѣленіе логариѳмовъ.

347. Возьмемъ двѣ безконечно возрастающія прогрессіи

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ldots\ldots,$$
$$0,\ \delta,\ 2\delta\ 3\delta,\ 4\delta,\ldots\ldots,$$

первая—геометрическая начинающаяся съ 1, вторая—ариѳметическая начинающаяся съ 0.

Логариѳмами чиселъ, составляющихъ прогрессію геометрическую, называются числа соотвѣтственно подъ ними подписанныя, въ прогрессіи ариѳметической.

Двѣ разсматриваемыя прогрессіи составляютъ *систему логариѳмовъ* и подчиняются единственному условію, чтобы первая начиналась съ единицы, а вторая съ нуля.

348. Если вставимъ какое нибудь одно и тоже число среднихъ, между каждымъ членомъ и слѣдующимъ, въ прогресіи геометрической и, въ тоже время, вставимъ тоже число среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ прогрессіи ариѳметической, то получимъ двѣ новыя прогрессіи (§§ 333 и 336). Тогда вставочныя числа въ прогрессіи ариѳметической называются *логариѳмами* соотвѣтственныхъ вставочныхъ чиселъ прогрессіи геометрической.

Для совершеннаго убѣжденія въ правильности предъидущаго опредѣленія необходимо доказать, что если какое нибудь число введено въ геометрическую прогрессію чрезъ вставку извѣстнаго числа среднихъ между каждымъ ея членомъ и слѣдующимъ и потомъ тоже число будетъ введено чрезъ вставку другаго числа среднихъ, то въ обоихъ случаяхъ логариѳмы этаго числа будетъ одни и тѣже.

Предположимъ, что число N было введено въ геометрическую прогрессію, чрезъ вставку $p-1$ среднихъ между каждымъ членомъ прогрессіи и слѣдующимъ и n былъ найденный логариѳмъ того числа; потомъ, что тоже число было введено чрезъ вставку $p'-1$ среднихъ и логариѳмъ для него получился n'. Тогда я говорю, что $n=n'$.

Въ самомъ дѣлѣ, вставляя $p-1$ среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ обѣихъ прогрессіяхъ, а потомъ вставляя по $p'-1$ среднихъ между членами вновь полученныхъ прогрессій, мы придемъ къ тому же (§§ 332 и 338) къ чему пришли бы, вставляя съ самаго начала по $pp'-1$ среднихъ между членами первоначальныхъ прогрессій. Но вставляя $pp'-1$ среднихъ мы получимъ для N логариѳмъ n. Точно тоже, если послѣ вставки по $p'-1$ среднихъ между каждымъ членомъ и слѣдующимъ въ обѣихъ прогрессіяхъ, вставимъ по $p-1$ среднихъ между членами вновь полученной прогрессіи, то придемъ къ тому же, къ чѣму пришли бы, вставляя, съ самого начала, по $pp'-1$ среднихъ между каждымъ членомъ первоначальныхъ прогрессіи. Чрезъ эту вставку $pp'-1$ среднихъ получимъ для N логариѳмъ n'. Изъ этого очевидно выходитъ, что $n=n'$.

349. *Логариѳмомъ* числа N, которое не можетъ быть введено въ геометрическую прогрессію чрезъ вставку среднихъ, называется число *превышающее* логариѳмы чиселъ меньшихъ чѣмъ N, но способныхъ быть введенными въ прогрессію чрезъ вставку среднихъ и *меньшее* логариѳмовъ чиселъ превышающихъ N и тоже способныхъ быть введенными въ прогрессію чрезъ вставку среднихъ. *).

Это опредѣленіе позволяетъ находить два числа между которыми заключается логариѳмъ числа N и разность между

*) Нѣтъ необходимости этотъ логариѳмъ считать числомъ несоизмѣримымъ. (*Прим. перев.*)

которыми можетъ быть такъ мала какъ того пожелаютъ; слѣдовательно, оно позволяетъ составлять послѣдовательныя величины неопредѣленно приближающіяся къ этому логариѳму. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ что вставлено $p-1$ среднихъ между различными членами прогрессіи ариѳметической. Пусть вновь полученныя прогрессіи будутъ

$$1,\ q',\ q'^2,\ q'^3,\ \ldots\ldots,\ q'^i,\ q'^{i+1},\ \ldots\ldots,$$
$$0,\ \delta',\ 2\delta',\ 3\delta',\ \ldots,\ i\delta',\ (i+1)\delta',\ \ldots\ldots.$$

По предположенію N не можетъ быть членомъ геометрической прогрессіи, но можетъ заключаться между двумя послѣдовательными ея членами, а такъ какъ (§ 343) частное q' болѣе чѣмъ 1, то дальнѣйшія члены могутъ превзойти всякое данное число. Пусть q'^i и q'^{i+1} будутъ члены, между которыми заключается N; логариѳмы этихъ двухъ чиселъ будутъ $i\delta'$ и $(i+1)\delta'$, разность между которыми есть δ'. По опредѣленію, логариѳмъ N заключается между $i\delta'$ и $(i+1)\delta'$, слѣдовательно, принимая вмѣсто этого логариѳма одно или другое изъ этихъ чиселъ, мы сдѣлаемъ ошибку меньшую чѣмъ δ'. Но мы имѣемъ, что

$$\delta' = \frac{\delta}{p}$$

и p мы можемъ взять настолько большимъ, что $\frac{\delta}{p}$ можетъ сдѣлаться менѣе всякаго даннаго числа.

350. Если два числа N и N′ способны быть введенными въ геометрическую прогрессію, то большему изъ чиселъ будетъ соотвѣтствовать большій логариѳмъ. Дѣйствительно, эти два числа могутъ быть одновременно вставлены въ прогрессію чрезъ вставку извѣстнаго числа среднихъ (§ 338, слѣдствіе II); но между тѣмъ прогрессія, членами которой они сдѣлаются, есть возрастающая, также какъ и соотвѣтствующая ей ариѳметическая прогрессія. Тоже самое будетъ имѣть мѣсто, согласно опредѣленія, и въ томъ случаѣ, когда только одно изъ чиселъ N и N′ можетъ быть введено въ геометрическую прогрессію. Для этаго, предположимъ, что $N > N'$ и представимъ себѣ, что вставлено по $p-1$ среднихъ между всѣми членами первоначальной прогрессіи; пусть происшедшія отъ того прогрессіи будутъ

$$1,\ q',\ q'^2,\ q'^3,\ \ldots\ldots,\ q'^i,\ q'^{i+1}\ldots\ldots,$$
$$0,\ \delta',\ 2\delta'.\ 3\delta',\ \ldots\ldots\ i\delta',\ (i+1)\delta',\ \ldots.$$

Также пусть q'^{i} и $q'^{i}\times_{1}$ будутъ послѣдовательные члены геометрической прогрессіи, между которыми заключается N. Я говорю, можно предположить, что вставленное число $p-1$ среднихъ такъ велико, что разность между q'^{i+1} и q'^{i} будетъ менѣе какого нибудь даннаго числа α. Въ самомъ дѣлѣ, эта разность равна $q'^{i+1}-q'^{i}$, т. е. равна q'^{i} $(q'-1)$; слѣдовательно она менѣе чѣмъ N $(q'-1)$. Поэтому достаточно доказать можетъ ли существовать неравенство

$$N\,(q'-1) < \alpha, \text{ или } q'-1 < \frac{\alpha}{N}, \text{ или } q' < 1+\frac{\alpha}{N}.$$

Но мы имѣемъ, что

$$q' = \sqrt[p]{q};$$

поэтому намъ придется доказать, можетъ ли существовать неравенство

$$\sqrt[p]{q} < 1+\frac{\alpha}{N}, \text{ или } q < \left(1+\frac{\alpha}{N}\right)^{p}.$$

Это вытекаетъ изъ теоремы доказанной въ § 343; потому, что по смыслу этой теоремы, можно для p дать величину настолько большую, чтобы $\left(1+\frac{\alpha}{N}\right)^{p}$ превышало всякое данное число.

Послѣ всего сказаннаго можно предположить p настолько большимъ, что разность между членами q' и q'^{i+1} будетъ менѣе разности чиселъ N и N′; и какъ N заключается между q'^{i} и q'^{i+1}, то N′ не можетъ заключаться между тѣми же членами. Такимъ образомъ имѣемъ

$$N' < q'^{i} \text{ и } N > q'^{i}.$$

Слѣдовательно, логариѳмъ N′ менѣе чѣмъ q'^{i}, тогда какъ логариѳмъ N болѣе. Поэтому логариѳмъ N болѣе логариѳма N′.

351. Развивая предъидущее выходитъ, что всякое число большее 1 имѣетъ логариѳмъ, всякое же число меньше 1 его не имѣетъ. Логариѳмъ же 1 есть нуль.

Кромѣ того оказывается, что если число увеличивается то и логариѳмъ его также увеличивается и такъ какъ прогрессія опредѣляющая систему логариѳмовъ возрастаетъ неопредѣленно, то и логариѳмъ числа, увеличивающагося до всякаго предѣла, увеличивается также до всякаго предѣла.

Логариѳмъ числа изображается припискою съ лѣвой стороны числа начальныхъ буквъ log. Такъ log. N представляетъ логариѳмъ числа N.

Основныя свойства логариѳмовъ.

352. Теорема I.—*Логариѳмъ произведенія двухъ множителей, большихъ чѣмъ* 1, *равенъ суммѣ логариѳмовъ множителей.*

Пусть

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots\ldots,\ q^m,\ \ldots\ldots,\ q^n,\ \ldots\ldots,\ q^{m+n},\ \ldots\ldots$$
$$0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ \ldots\ldots,\ m\delta,\ \ldots\ldots,\ n\delta,\ \ldots\ldots,\ (m+n)\delta,\ \ldots\ldots$$

будутъ двѣ прогрессіи, представляющія какую нибудь систему логариѳмовъ.

Каждый членъ геометрической прогрессіи есть степень частнаго съ показателемъ равнымъ числу предшествующихъ членовъ; точно также, каждый членъ ариѳметической прогрессіи равенъ произведенію разности на число предшествующихъ членовъ. Послѣ того, разсмотримъ, напримѣръ, два члена геометрической прогрессіи q^m и q^n; получимъ

$$\log q^m = m\delta,\ \log q^n = n\delta.$$

Но произведеніе $q^m \times q^n$ или q^{m+n} есть членъ геометрической прогрессіи имѣющей до него $m+n$ членовъ, поэтому

$$\log (q^m \times q^n) = (m+n)\,\delta = m\delta + n\delta,$$

или

$$\log (q^m \times q^n) = \log q^m + \log q^n .$$

Это доказательство предполагаетъ, что оба множителя разсматриваемаго произведенія есть члены геометрической прогрессіи, но оно очевидно приложимо и въ томъ случаѣ, когда эти множители хотя и не будутъ оба членами прогрессіи, но могутъ быть введены въ нее чрезъ вставку среднихъ. Ибо, вставивъ приличное число среднихъ между всѣми членами обѣихъ прогрессій, мы получимъ двѣ новыхъ, изъ которыхъ первая будетъ содержать въ себѣ данныхъ множителей и тогда къ нимъ уже можно приложить предъидущій выводъ.

Теперь остается предложенную теорему доказать въ томъ случаѣ, когда изъ двухъ данныхъ чиселъ a и b, покрайней мѣрѣ одно не можетъ быть введено въ прогрессію.

Для этого вставимъ по $p-1$ среднихъ между всѣми членами въ каждой прогрессіи. Пусть a' и a'' будутъ двумя послѣдовательными членами новой геометрической прогрессіи между которыми заключается a; а b' и b'' пусть будутъ тѣ, между которыми заключается b. Произведеніе ab будетъ заключаться между $a'b'$ и $a''b''$; и будетъ

$$\begin{cases} \log ab > \log a'b' \\ \log a + \log b > \log a' + \log b', \end{cases} \quad \begin{cases} \log ab < \log a''b'' \\ \log a + \log b < \log a'' + \log b''. \end{cases}$$

А такъ какъ

$$\log a'b' = \log a' + \log b' \text{ и } \log a''b'' = \log a'' + \log b'',$$

то

$$\log ab \text{ и } \log a + \log b$$

будутъ заключаться, какъ тотъ такъ и другой, между

$$\log a' + \log b' \text{ и } \log a'' + \log b''$$

эти двѣ суммы разнятся между собою на $\frac{2\delta}{p}$, ибо каждая изъ разностей $\log a'' - \log a'$, $\log b'' - \log b'$ равно $\frac{\delta}{p}$, тогда p можно принять на столько большимъ, что разность разсматриваемыхъ суммъ будетъ менѣе всякой данной величины. Изъ этого видно, что ощутительной разницы между $\log ab$ и $\log a + \log b$ произойти не можетъ. Слѣдовательно имѣемъ

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Слѣдствіе.—*Логариѳмъ произведенія нѣсколькихъ множителей равенъ суммѣ логариѳмовъ множителей.*

Въ самомъ дѣлѣ, возмемъ произведеніе

$$a\ b\ c\ d\ e.$$

По предъидущей теоремѣ имѣемъ

$$\begin{aligned} \log abcde &= \log a + \log bcde \\ &= \log a + \log b + \log cde \\ &= \log a + \log b + \log c + \log de \\ &= \log a + \log b + \log c + \log d + \log e \end{aligned}$$

353. Теорема II.— *Логариѳмъ частнаго двухъ чиселъ большихъ чѣмъ единица; равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя, если это частное само больше* 1.

Возьмемъ два числа a и b большія чѣмъ 1. Предположимъ также, что $a > b$, т. е. $\frac{a}{b} > 1$. Но мы имѣемъ

$$a = \frac{a}{b} \times b$$

откуда

$$\log a = \log \frac{a}{b} + \log b$$

а слѣдовательно

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

354. Теорема III.—*Логариѳмъ степени числа, большаго чѣмъ* 1, *равенъ логариѳму этаго числа, умноженному на показателя степени.*

Разсмотримъ, напримѣръ, четвертую степень числа a, большаго чѣмъ 1. Имѣемъ

$$a^4 = a \times a \times a \times a,$$

откуда по (§ 352)

$$\log a^4 = \log a + \log a + \log a + \log a$$

или

$$\log a^4 = 4 \log a$$

это вообще доказываетъ, что

$$\log a^m = m \log a$$

каково бы ни было m.

355. Теорема IV.—*Логариѳмъ корня изъ числа, большаго чѣмъ* 1, *равенъ логариѳму числа раздѣленному на показателя корня.*

Разсмотримъ корень $m^{\text{вый}}$ изъ числа a большаго чѣмъ 1. Имѣемъ.

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$$

откуда по (§ 354)

$$m \log \sqrt[m]{a} = \log a,$$

а слѣдовательно

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

Различныя системы логариѳмовъ.

356. Можно произвольно избрать число q, которое будетъ имѣть логариѳмомъ какое нибудь данное число δ, или, что тоже, избрать число δ, которое будетъ логариѳмомъ какого нибудь даннаго числа q. Тогда логариѳмы всѣхъ прочихъ чиселъ будутъ опредѣлены, потому что двѣ прогрессіи

$$1, q, q^2, q^3, \ldots\ldots$$
$$0, \delta, 2\delta\ 3\delta \ldots\ldots$$

будутъ опредѣлять систему логариѳмовъ.

Необходимо опредѣлить систему логариѳмовъ, указавъ то число, логариѳмомъ котораго будетъ 1. Это число называется *основаніемъ* системы логариѳмовъ.

357. Теорема.—*Отношеніе логариѳмовъ двухъ чиселъ* a *и* b *постоянно, каково бы ни было основаніе системы.*

Пусть a и b будутъ два числа, большія чѣмъ 1; обозначимъ чрезъ $\log a$ и $\log b$ логариѳмы этихъ чиселъ при системѣ, для которой основаніемъ служитъ B; чрезъ $\log a'$ и $\log b'$ логариѳмы тѣхъ же чиселъ по системѣ имѣющей основаніемъ B′; тогда я говорю

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{\log a'}{\log b'}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ прежде, что отношеніе $\frac{\log a}{\log b}$ будетъ соизмѣримымъ числомъ $\frac{m}{n}$, то получимъ

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{m}{n}$$

откуда

$$n \log a = m \log b$$

т. е. (§ 354)

$$\log a^n = \log b^m$$

слѣдовательно

$$a^n = b^m.$$

Взявъ теперь логариѳмы двухъ чиселъ a^n и b^m, по системѣ имѣющей основаніемъ B′, будетъ

$$\log' a^n = \log' b^m \text{ или } n \log' a = m \log' b,$$

или

$$\frac{\log' a}{\log' b} = \frac{m}{n}.$$

Оба отношенія $\frac{\log a}{\log b}$ и $\frac{\log' a}{\log' b}$ равны, потому что каждое равно дроби $\frac{m}{n}$.

Теперь предположимъ, что отношеніе $\frac{\log a}{\log b}$ будетъ число несоизмѣримое, вычислимъ это число съ точностію до $\frac{1}{n}$ и пусть $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ будутъ полученныя нами приближенныя величины. Тогда

$$\frac{\log a}{\log b} > \frac{m}{n} \text{ и } \frac{\log a}{\log b} < \frac{m+1}{n},$$

или

$$n \log a > m \log b \text{ и } n \log a < (m+1) \log b,$$

т. е.

$$\log a^n > \log b^m \text{ и } \log a^n < \log b^{m+1};$$

слѣдовательно

$$a^n > b^m \text{ и } a^n < b^{m+1}.$$

Взявъ же логариѳмы по системѣ имѣющей основаніемъ B′, найдемъ

$$\log' a^n > \log' b^m \text{ и } \log' a^n < \log' b^{m+1},$$

или

$$n \log' a > m \log' b \text{ и } n \log' a < (m+1) \log' b;$$

слѣдовательно

$$\frac{\log' a}{\log' b} > \frac{m}{n} \text{ и } \frac{\log' a}{\log' b} < \frac{m+1}{n}.$$

Оба отношенія $\frac{\log a}{\log b}$ и $\frac{\log' a}{\log' b}$ заключаются между двумя дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, разность которыхъ $\frac{1}{n}$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго даннаго числа. Слѣдовательно между разсматриваемыми отношеніями не можетъ существовать ощутительной разности.

Слѣдствіе.—*Логариѳмы чиселъ по системѣ, имѣющей основаніе B′, получатся, умножая на постоянное число логариѳмы взятыя по системѣ, имѣющей основаніемъ B.*

Въ самомъ дѣлѣ, сохраняя предъидущее положеніе, что

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{\log' a}{\log' b},$$

отсюда получимъ

$$\frac{\log' a}{\log a} = \frac{\log' b}{\log b}.$$

Отношеніе $\frac{\log' a}{\log a}$ независимо отъ числа a, обозначивъ его чрезъ k, получимъ

$$\log' a = k \log a,\ \log' b = k \log b;$$

изъ чего слѣдуетъ, что логариѳмы по системѣ B′ получатся, умноживъ логариѳмы взятыя по системѣ B на k.

Примѣчаніе.—Чтобы опредѣлить число k, достаточно знать логариѳмъ основанія B по системѣ B', или логариѳмъ основанія B' взятый по системѣ B. Въ самомъ дѣлѣ,

$$k = \frac{\log' B}{\log B}, \text{ или } k = \frac{\log' B'}{\log B'};$$

но такъ какъ $\log B = 1$ и $\log B' = 1$, то

$$k = \log' B, \text{ или } k = \frac{1}{\log B'}.$$

Обыкновенные логариѳмы.

358. *Обыкновенными* логариѳмами или логариѳмами *Бригга* называются тѣ, которыхъ система имѣетъ основаніемъ 10.

Такимъ образомъ обыкновенные логариѳмы опредѣляются двумя прогрессіями:

1, 10, 100, 1000,.....
0, 1, 2, 3,.....

Въ числовыхъ приложеніяхъ эти логариѳмы употребительнѣе прочихъ, поэтому они нами и будутъ разсматриваться (*).

Когда цѣлая часть какого нибудь числа состоитъ изъ k цифръ, то это число заключается между 10^{k-1} и 10^k, а его обыкновенный логариѳмъ заключается между $k-1$ и k; слѣ-

(*) Изобрѣтатель логариѳмовъ шотландецъ Непперъ за основоніе системы логариѳмовъ принялъ число 2,718281828..... Бриггъ же былъ первый, принявшій (впрочемъ по указанію Непера) за основаніе системы число 10. Чтобы получить логариѳмъ какого нибудь числа по Непперовой системѣ, должно логариѳмъ Бриггової системы умножить на 2,3025839..... (*Прим. перев.*).

довательно цѣлая часть этого логариѳма есть $k-1$. Эта цѣлая часть называется *характеристикою* логариѳма.

Характеристикою логариѳма какого нибудь числа N будетъ 0, 1, 2, 3,..... смотря потому будетъ ли число N содержать въ себѣ 1, 2, 3, 4,..... цифры.

359. Когда какое нибудь число N умножимъ или раздѣлимъ на степень 10, напримѣръ на 10^n, то характеристика логариѳма числа N увеличится или уменьшится на n единицъ, но дробная часть логариѳма не измѣнится. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\log N \times 10^n = \log N + \log 10^n = \log N + n;$$

и если N будетъ $> 10^n$, то

$$\log \frac{N}{10^n} = \log N - \log 10^n = \log N - n$$

Таблица логариѳмовъ.

360. Чтобы воспользоваться теоріею логариѳмовъ, должно умѣть опредѣлять съ надлежащимъ приближеніемъ логариѳмъ всякаго числа, и обратно, по данному логариѳму находить число. Этой цѣли достигаютъ помощью таблицъ логариѳмовъ.

Дѣйствія посредствомъ которыхъ устраиваются таблицы логариѳмовъ не подлежатъ разсмотренію Ариѳметики, поэтому и мы удержимся отъ изложенія всѣхъ подробностей этаго дѣла. (*)

Изъ таблицъ логариѳмовъ, таблицы *Каллета* содержатъ въ себѣ логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 108000 въ семи десятичныхъ знакахъ. Таблицы *Лаланда* содержатъ въ себѣ логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10000, въ пяти десятичныхъ знакахъ. Таблицы Каллета употребляются при

(*) Съ этихъ поръ и до конца главы сдѣланы слѣдующія измѣненія, придерживаясь впрочемъ подлинника. Помѣщенное тамъ употребленіе логариѳмическихъ таблицъ Каллета, замѣнено употребленіемъ логариѳмическихъ таблицъ Лаланда, взятымъ мною изъ другаго сочиненія того же автора, изъ „Elémenls d'Arilhmelique“. Поэтому и примѣры логариѳмическихъ вычисленій предложены въ пяти десятичныхъ. Это я считалъ полезнымъ потому, что эти таблицы весьма распространены, достаточно дешевы и вполнѣ соотвѣтствуютъ начальному обученію.

(*Прим. перев.*)

болѣе точныхъ вычисленіяхъ, по большей же части употребляются таблицы Лаланда.

Употребленіе логариѳмическихъ таблицъ Лаланда (*).

361. Таблицы Лаланда содержатъ въ себѣ логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10000, вычисленные точно до пяти десятичныхъ, т. е. съ точностію до $\frac{1}{2}$ единицы пятаго десятичнаго порядка.

Эти таблицы (*стереотипное изданіе*) расположены такъ: каждая страница раздѣлена на три вертикальныхъ ряда, каждый рядъ одинаково состоитъ изъ трехъ вертикальныхъ столбцевъ. Въ первомъ столбцѣ, обозначенномъ буквою N, помѣщаются числа, во второмъ, обозначенномъ (log), логариѳмы чиселъ, а въ третьемъ, обозначенномъ буквою D, разности между предъидущими и послѣдующими логариѳмами чиселъ начиная съ 1000 и до конца.

Должно замѣтить, что можно ограничиться логариѳмами чиселъ только отъ 1000 до 10000, а потому эта часть таблицъ преимущественно и употребляется. Дѣйствительно, 1000 первыхъ чиселъ имѣютъ одни и тѣ же логариѳмы съ числами соотвѣтственно въ десять разъ большими, если не обращать вниманіе на характеристику, которая впрочемъ можетъ быть предварительно извѣстна. Сличая два послѣдовательные логариѳма таблицы, начиная съ логариѳма числа 1000, помѣщаютъ рядомъ разность D этихъ логариѳмовъ, выраженную въ единицахъ пятаго десятичнаго порядка.

Помощью таблицъ можно находить логариѳмъ всякаго числа, и обратно, по данному логариѳму искомое число. Рѣшимъ эти два вопроса.

362. Задача I.—*Дано какое нибудь число, найти его логариѳмъ помощью логариѳмическихъ таблицъ.*

Первый случай. Дано цѣлое число меньшее 10000; тогда требуемый логариѳмъ найдется прямо въ таблицахъ, отыскавъ

(*) При дальнѣйшемъ изложеніи, читатель предполагается имѣющимъ предъ собою Таблицы Лаланда. Издателей этихъ таблицъ было нѣсколько, а именно: Köhler, Houël Saigey, Dupuis и проч. Впрочемъ всѣ эти таблицы по расположенію болѣе или менѣе сходны между собой. Мною были взяты изданныя *Köhler*'омъ (стереотипное изданіе 1844 г.).

(*Прим. перев.*).

данное число. Найти, напримѣръ, логариѳмъ 4869? Въ таблицахъ отыскиваютъ число 4869 въ столбцахъ N и тогда вправо рядомъ стоящее число 3,68744 будетъ его логариѳмомъ.

Второй случай. Дано цѣлое число большее 10000. Пусть, напримѣръ, дано число 48697. Тогда достаточно найти логариѳмъ числа 4869,7, которое менѣе 10000 и получилось отъ раздѣленія на 10 даннаго числа. Въ самомъ дѣлѣ, логариѳмъ 4869,7 разнится отъ требуемаго логариѳма только характеристикою, но какъ данное число въ пять цифръ, то хтрактеристика его извѣстна, она равна 4. Но числа 4869,7 въ таблицахъ нѣтъ, тогда беремъ логариѳмъ числа 4869, котораго десятичная честь есть 68744 и, взглянувъ вправо на столбецъ разностей D, видимъ, что этотъ *табличный* логариѳмъ разнится отъ слѣдующаго на 9 единицъ пятаго десятичнаго порядка и чтобы сдѣлать его логариѳмомъ для 4869,7, должно обратиться къ слѣдующему положенію.

Малыя приращенія, получаемыя одновременно числомъ и его логариѳмомъ, между собою пропорціональны.

Основываясь на этомъ положеніи, намъ остается рѣшить слѣдующій вопросъ: если логариѳмъ числа 4869, съ увеличеніемъ числа на 1 въ тоже время увеличивается на 9 единицъ пятаго десятичнаго порядка, то насколько увеличится тотъ же логариѳмъ, когда къ числу прибавится только 0, 7? Очевидно, искомое приращеніе будетъ $9 \times 0{,}7$ или 6, 3 единицы пятаго десятичнаго порядка и, не принимая во вниманіе цифру 3, ибо она выражаетъ единицы шестаго десятичнаго порядка, прикладываютъ просто 6 единицъ къ пятому порядку логариѳма для 4869. Образецъ дѣйствія такой

log	4869.	68744	0,7
	0,7	6	9
log	4869,7.	68750	6,3

Такимъ образомъ логариѳмъ даннаго числа 48697 есть 4,68750.

Предложимъ еще примѣръ, найти логариѳмъ числа 4869789; отыскиваемъ логариѳмъ для 4869,789 и поступаемъ какъ въ предъидущемъ примѣрѣ:

log	4869.	68744	0,78
	0,789. . . .	7	9
log	4869,789. . . .	68751	7,02

Поэтому требуемый логариѳмъ есть 6,68751.

Вообще, *чтобы имѣть логариѳмъ цѣлаго числа бо́льшаго* 10000, *запятую помѣщаютъ за четвертой слѣва цифрой даннаго числа, пріискиваютъ логариѳмъ цѣлой полученной части; потомъ вычисляютъ, съ точностію до* $\frac{1}{2}$ *единицы, произведеніе десятичной части этого числа на табличную разность и прикладываютъ къ найденному логарѳму столько единицъ пятаго десятичнаго порядка, сколько получится цѣлыхъ единицъ въ произведеніи; наконецъ, полученному результату даютъ приличную характеристику.*

Очевидно, что если данное число имѣетъ болѣе шести цифръ, то седьмая и слѣдующія цифры не имѣютъ ни какого вліянія на десятичную часть логариѳма.

Примѣчаніе.—Положеніе о пропорціональности приращенія числа съ приращеніемъ его логариѳма въ строгомъ смыслѣ не точно, но въ тѣхъ предѣлахъ въ какихъ оно принимается, происходящая ошибка не оказываетъ ни какого вліянія на искомый результатъ. Въ этомъ можно удостовѣриться изъ самыхъ таблицъ, ибо видно, что на каждой страницѣ, особенно въ концѣ таблицъ, разности между логариѳмами замѣтно постоянны. Слѣдовательно отъ равныхъ приращеній даваемыхъ числу, логариѳмъ его получаетъ тоже почти равныя приращенія.

Третій случай. Дано число десятичное. Въ этомъ случаѣ запятую откидываютъ и находятъ логариѳмъ полученнаго цѣлаго числа, потомъ этому логариѳму даютъ приличную характеристику.

Предположимъ, что ищется логариѳмъ для 48,697. Десятичная часть логариѳма 48697 есть 68750, поэтому требуемый логариѳмъ будетъ 1,68750.

Четвертый случай. Данное число есть простая дробь. Тогда ищутъ логариѳмы числителя и знаменателя и изъ перваго вычитаютъ второй (§ 353).

363. Задача II.—*Данъ логариѳмъ, требуется найти помощью таблицъ число, которому онъ соотвѣтствуетъ.*

Первый случай. Если десятичная часть даннаго логариѳма находится въ таблицахъ, то берутъ стоящее рядомъ, ему соотвѣтствующее число и назначаютъ въ немъ столько порядковъ единицъ, сколько ихъ указано характеристикою даннаго логариѳма. Предложимъ себѣ для примѣра найти

число, котораго логариѳмъ 2,43823. Десятичная часть въ таблицахъ есть, ей соотвѣтствуетъ число 2743; поэтому искомое число будетъ 274,3. Если желаютъ имѣть число, котораго логариѳмъ есть 4,43823, то точно такъ же находятъ, что требуемое число есть 27430.

Второй случай. Положимъ, что данный логариѳмъ не находится въ таблицахъ, пусть этотъ логариѳмъ будетъ 2,51781. Мы беремъ изъ таблицъ ближайшій къ данному меньшій логариѳмъ, не обращая вниманія на его характеристику; такимъ образомъ находимъ 51772, соотвѣтствующій числу 3294, для котораго табличная разность есть 14. Разность же между десятичными частями даннаго логариѳма и логариѳма табличнаго будетъ 9 единицъ пятаго десятичнаго порядка. Теперь основываясь на указанномъ положеніи должно рѣшить слѣдующій вопросъ: когда число 3294 увеличилось на 1, его логариѳмъ увеличился на 14 единицъ пятаго порядка, то на сколько увеличится число 3294, если его логариѳмъ увеличился только на 9 единицъ пятаго порядка? Очевидно, это увеличеніе будетъ $\frac{9}{14}$ или 0,64. Но намъ нужно принимать въ расчетъ только цифру десятыхъ долей и потому придаемъ только 0,6 къ числу 3294. Тогда число 3294,6 будетъ соотвѣтствовать логариѳму имѣющему десятичную часть 51781, а слѣдовательно число отвѣчающее данному логариѳму будетъ 329,46. Вотъ порядокъ вычисленія

51772..... log	3294	90	14
	0,6	60	0,64
		4	
51781..... log	3273,5		

Вообще, *чтобы найти число соотвѣтствующее данному логариѳму, должно отыскать въ той части таблицъ, гдѣ помѣщены числа отъ* 1000 *до* 10000, *ближайшій меньшій логариѳмъ къ данному логариѳму, не обращая вниманія на характеристику и вычесть этотъ логариѳмъ изъ даннаго; потомъ вычислить частное, отъ дѣленія полученнаго остатка на разность соотвѣтствующую табличному логариѳму, съ точностію до* $\frac{1}{2}$ *единицы десятыхъ долей и приписать справа къ числу соотвѣтствующему табличному логариѳму. Наконецъ, въ полученномъ результатѣ должно назначить перенесеніемъ запятой столько порядковъ цѣлыхъ, сколько указываетъ характеристика даннаго логариѳма.*

Такимъ образомъ всякое число по его логариѳму съ пятью дясятичными знаками можно вычислить съ точностью до одной единицы порядка пятой цифры. Такое приближеніе въ большей части случаевъ достаточно, но когда приходится вычислять съ большей точностью, необходимо должно употреблять тиблицы съ 7 и даже съ 10 десятичными.

Приложенія теоріи логариѳмовъ.

364. Четыре теоремы, доказанныя въ §§ 352 и слѣдующихъ замѣняютъ: умноженіе нѣсколькихъ чиселъ—сложеніемъ логариѳмовъ этихъ чиселъ; дѣленіе двухъ чиселъ—вычитаніемъ логариѳмовъ этихъ чиселъ; возвышеніе числа въ m-вую степень—умноженіемъ на m логариѳма этаго числа; и, наконецъ, извлеченіе изъ числа m-ваго корня—дѣленіемъ на m логариѳма этаго числа. Дѣйствительно, когда логариѳмъ неизвѣстнаго числа будетъ опредѣленъ, то легко найти и самое число.

Вообще, когда какое нибудь число должно быть получено по нѣсколькимъ даннымъ числамъ связаннымъ между собою дѣйствіями умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченіемъ корней, то вычисляютъ его логариѳмъ помощью сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, а потомъ отъ логариѳма переходятъ къ самому числу.

Чтобы такимъ образомъ можно было вычислить логариѳмами какое нибудь число, необходимо: 1^0 чтобы числа надъ которыми должны производиться дѣйствія были болѣе 1; 2^0 чтобы результатъ дѣйствія также былъ болѣе 1.

Можно всегда распорядиться такимъ образомъ, что первое условіе будетъ выполнено. Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что одно изъ чиселъ напримѣръ, a, множащее, дѣлящее и т. п. будетъ менѣе 1, то умноженіе или дѣленіе на a равносильно съ дѣленіемъ или умноженіемъ на $\frac{1}{a}$, т. е. на число большее единицы, слѣдовательно имѣющее логариѳмъ.

Также можно замѣтить, что число меньшее 1 можетъ быть разсматриваемо въ формѣ $\frac{a}{b}$, гдѣ a и b выражены будутъ числами большими 1; слѣдовательно умноженіе на $\frac{a}{b}$ све-

дется къ умноженію на a и дѣленію на b; точно также дѣленіе на $\frac{a}{b}$ сведется къ умноженію на b и дѣленію на a.

Чтобы удовлетворить второму условію, когда вычисляемое число будетъ менѣе 1, умножаютъ его на степень 10 съ показателемъ n неопредѣленнымъ, но принимаемымъ на столько большимъ, чтобы произведеніе получилось больше 1. Потомъ берутъ логариѳмъ этаго произведенія, отъ логариѳма переходятъ къ числу и полученный результатъ дѣлятъ на 10^n.

365. *Примѣръ* I.—Требуется вычислить по логариѳмамъ произведеніе 3,14159 на 0,98696.

Пусть N будетъ произведеніе; одинъ множитель менѣе единицы, приведемъ его къ формѣ $\frac{9,8696}{10}$. По этому

$$N = \frac{3,14159 \times 9,8696}{10}$$

и такъ какъ N болѣе 1, а $\log 10 = 1$, то,

$$\log N = \log 3,14159 + \log 9,8696 - 1.$$

Вычисленіе располагаютъ такъ

$$\begin{array}{l} \log 3,14159 \ldots\ldots\ldots 0,49715 \\ \log 9,8696 \ldots\ldots\ldots 0,99430 \\ \hline \log N \ldots\ldots\ldots 0,49145 \\ N \ldots\ldots\ldots 3,1006. \end{array}$$

366. *Примѣръ* II.—Требуется вычислить частное отъ дѣленія 0,3183098 на 0,98696.

Пусть N будетъ частное. Дѣлимое и дѣлитель менѣе 1, умножая то и другое на 10, получимъ

$$N = \frac{3,183098}{9,8696}$$

и, какъ $N < 1$, то пишемъ

$$N \times 10^n = \frac{10^n \times 3,183098}{9,8696},$$

откуда

$$\log N \times 10^n = n + \log 3{,}183098 - \log 9{,}8696.$$

Дѣйствіе располагаютъ такъ

$$\begin{array}{r} n + \log 3{,}183098 \ldots\ldots n + 0{,}50285 \\ \log 9{,}8696 \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}99430 \\ \hline \log N \times 10^n \ldots\ldots n - 1 + 0{,}50855 \\ N \times 10^n \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}32252 \times 10^n \\ N. \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}32252. \end{array}$$

367. *Примѣръ* III.—Требуется вычислить десятую степень числа 2,7183.

Пусть N будетъ эта десятая степень. Имѣемъ

$$N = (2{,}7183)^{10},$$
$$\log N = 10 \times \log 2{,}7183.$$

Дѣйствіе располагаютъ такъ

$$\begin{array}{r} \log 2{,}7183 \ldots\ldots 0{,}43430 \\ \log N \ldots\ldots 4{,}3430 \\ N \ldots\ldots 22030. \end{array}$$

Въ этомъ примѣрѣ, логариѳмъ искомаго числа N можетъ быть полученъ только съ четырьмя десятичными, поэтому ихъ можно считать первыми цифрами числа N; и величина этаго числа будетъ 22030, съ точностію до однаго десятка.

368. *Примѣръ IV.*—Требуется вычислить корень 5 степени изъ $\left(\frac{2}{3}\right)^7$.

Пусть N будетъ корень 5 степени. Имѣемъ

$$N = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^7} = \sqrt[5]{\frac{2^7}{3^7}} = \frac{\sqrt[5]{2^7}}{\sqrt[5]{3^7}}$$

слѣдовательно

$$N \times 10^n = \frac{10^n \sqrt[5]{2^7}}{\sqrt[5]{3^7}}$$

или

$$\log N \times 10^n = n + \log \sqrt[5]{2^7} - \log \sqrt[5]{3^7}$$

Между тѣмъ

$$\log \sqrt[5]{2^7} = \frac{1}{5} \log 2^7 = \frac{7}{5} \log 2,$$

точно также

$$\log \sqrt[5]{3^7} = \frac{1}{5} \log 3^7 = \frac{7}{5} \log 3.$$

Поэтому

$$\log N \times 10^n = n + \frac{7}{5} \log 2 - \frac{7}{5} \log 3.$$

Дѣйствіе располагаютъ такъ

$$n + \frac{7}{5} \log 2 \ldots\ldots n + 0{,}42144$$

$$\frac{7}{5} \log 3 \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}66797$$

$$\log N \times 10^n \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}75347$$

$$N \times 10^n \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}56684 \times 10^n$$

$$N \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}56684.$$

Употребленіе отрицательной характеристики (*).

369. Характеристики логариѳмовъ служатъ для указанія порядка высшихъ единицъ въ соотвѣтствующихъ числахъ; распространяя подобное свойство характеристикъ, можно приложить оное къ логариѳмамъ чиселъ меньшихъ единицы. Разсмотримъ, напримѣръ, число 2,743, котораго лога-

(*) Взято изъ „Elémenls d'Arithmetique, par A. Serret 1865“. Статья эта изложена практически, потому что доказательства въ ней, заставили бы выдти изъ предѣловъ Ариѳметики.

(*Прим. перев.*)

риѳмъ есть 0,43823; мы знаемъ, что десятичная часть этаго логариѳма также соотвѣтствуетъ логариѳмамъ чиселъ

27,43, 274,3, 2743, 2743 . . . . . ,

поэтому естественно положить, что числа

0,2743, 0,02743, 0,002743, ...

имѣютъ одинаковыя лагориѳмы, десятичная часть которыхъ есть 43823, а характеристика должна быть избрана такая, чтобы съ точностію указывала на мѣсто запятой. Для характеристики логариѳма числа меньшаго 1, согласились принимать цифру указывающую на порядокъ высшихъ десятичныхъ единицъ этаго числа и, чтобы отличить такой логариѳмъ отъ логариѳма числа большаго единицы, надъ характеристикою перваго помѣщаютъ значекъ—; такимъ образомъ пишутъ:

$$\begin{aligned} \log 0{,}2743 &= \bar{1},43823, \\ \log 0{,}02743 &= \bar{2},43823, \\ \log 0{,}002743 &= \bar{3},43823. \end{aligned}$$

Характеристики имѣющія надъ собою знакъ—называются *отрицательными*, а тѣ, которыя разсматривались нами до сего—*положительными*. Когда придется между собою складывать или вычитать логариѳмы, изъ которыхъ одни съ положительной, а другіе съ отрицательной характеристикой, то должно помнить слѣдующія правила:

Чтобы сложить двѣ отрицательныхъ характеристики. берутъ сумму ихъ величинъ и результатъ отмѣчаютъ знакомъ—.

Чтобы сложить двѣ характеристики, одну положительную, а другую отрицательную, берутъ разность этихъ характеристикъ и результатъ отмѣчаютъ знакомъ — только тогда, когда этотъ знакъ имѣла бо́льшая характеристика.

Чтобы вычесть положительную или отрицательную характеристику, должно придать отрицательную, или вычесть равную положительную характеристику.

Изъ этихъ правилъ выходитъ, что умноженіе логариѳма съ отрицательной характеристикой на цѣлое должно быть вычислено по обыкновенному правилу, только единицы, которыя должны быть удержаны въ уможеніи десятичной части на цѣлое, должны быть вычтены изъ произведенія характеристики на множителя. Такъ, произведеніе лога-

риѳма $\overline{3}$, 43823 на 5 есть $\overline{13}$, 19115. Очевидно также, что когда нужно раздѣлить на цѣлое логариѳмъ съ отрицательной характеристикой должно вычислить съ избыткомъ частное отъ дѣленія характеристики на цѣлое, потомъ прибавить къ десятичной части столько единицъ, сколько ихъ дабавлено къ характеристикѣ для полуленія частнаго съ избыткомъ. Вотъ, напримѣръ, дѣленіе логариѳма $\overline{13}$,19115 на 5. Характеристика $\overline{13}$ даетъ частное $\overline{3}$ съ избыткомъ, десятичная же часть, которую остается найти, получится раздѣляя2, 19115 на 5, что даетъ 3, 43823 для искомаго частнаго.

Принимая предъидущія правила и разсматривая ихъ какъ простыя опредѣленія, основныя свойства § 347 и слѣдующихъ должны существовать во всякомъ случаѣ. А потому, производя логариѳмическія вычисленія по предъидущему способу, можно уже не обращать вниманія, будетъ ли искомый результатъ и числа надъ которыми производятъ вычисленія болѣе или менѣе 1. Предложимъ теперь два прежде рѣшенные нами примѣра въ §§ 366 и 368.

1°. Вычислить $N = 0{,}318309 : 0{,}98696.$

$$\log 0{,}318309 \ldots \overline{1}{,}50285$$
$$\log 0{,}98676 \ldots\ldots \overline{1}{,}99430$$
$$\log N \ldots\ldots \overline{1}{,}50855.$$
$$N \ldots\ldots 0{,}32252.$$

2°. Вычислить $N = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^7}$.

$$\tfrac{7}{5}\log 2 \ldots\ldots 0{,}42144$$
$$\tfrac{7}{5}\log 3 \ldots\ldots 0{,}66797$$
$$\log N \ldots\ldots \overline{1}{,}75347$$
$$N \ldots\ldots 0{,}56684.$$

370. Употребленіе отрицательныхъ характеристикъ еще позволяетъ избѣгать вычитаній въ логариѳмическихъ вычисленіяхъ. Дѣйствительно, частное отъ дѣленія одного числа на другое, равно произведенію перваго числа на обратное второе (§ 475); слѣдовательно въ логариѳмическихъ вычисленіяхъ, вычитаніе логариѳма числа замѣняется сложе-

ніемъ логариѳма обратнаго числа. Когда вычисляютъ логариѳмъ числа, то логариѳмъ обратнаго числа можно получить непосредственно. Для этаго достаточно первый логариѳмъ вычесть изъ 0,00000, согласно предъидущихъ правилъ. Очевидно, что десятичная часть втораго логариѳма получается изъ десятичной части перваго, замѣняя цервую справа значущую цифру дополненіемъ ея до 10, а послѣдующія дополненіемъ до 9. Что же касается до характеристики, то она получится вычитая изъ отрицательной характеристики $\overline{1}$, характеристику перваго логариѳма. Такимъ образомъ, если логариѳмъ какого нибудь числа есть $\overline{3},47080$, то логариѳмъ обратнаго числа будетъ 2,52920.

Чтобы дать примѣръ такого способа вычисленій, предложимъ себѣ вычислить слѣдующее выраженіе.

$$X = 1999 \times \frac{363}{451} \times 6 \times \sqrt{\frac{449}{1335} \times \frac{88}{215}}.$$

Дѣйствіе располагаютъ такъ:

$\log 449$	2,65225	$\log \sqrt{\frac{449}{1335} \times \frac{88}{215}}$	$\overline{1},56940$
$\log \frac{1}{1335}$	$\overline{4},87452$	$\log 6$	0,77815
$\log 88$	1,94448	$\log 363$	2,55991
$\log \frac{1}{215}$	$\overline{3},66756$	$\log \frac{1}{451}$	$\overline{3},34582$
	$\overline{1},13881$	$\log 1999$	3,30081
		$\log X$	3,55409
		X	3581,7

Упражненія.

1°. Вычислить логариѳмъ числа N по системѣ, основаніе которой есть B. Возьмемъ, напримѣръ,

$$N = 10,\ B = 2,71828.$$

2°. Найти основаніе системы, въ которой данное число N имѣетъ логариѳмомъ другое данное n.

Различая случаи, когда n соизмѣримо и когда оно не соизмѣримо. Возьмемъ напримѣръ,

$$1^0.\ N = 7,\ n = 7.$$

$$2^0.\ N = \sqrt[3]{5},\ n = \sqrt{7}.$$

3^0. Ремень, длиною $0,^{m}363$ и въ діаметрѣ $0,^{m}0015$, когда натянутъ тяжестью въ $13,^{kil}55$, производитъ въ секунду число поперечныхъ дрожаній равное

$$\frac{1}{2\times 0,363\times 0,0015}\sqrt{\frac{9,8088\times 13,55}{3,1416\times 8,8}},$$

вычислить это число.

4. Сколько должно взять множителей въ натуральномъ ряду цѣлыхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, ... , чтобы имѣть произведеніе превышающее какое нибудь данное число напр. 10^{100}?

КНИГА ШЕСТАЯ.

ИМЕНОВАННЫЯ ЧИСЛА И ПРИЛОЖЕНІЯ АРИѲМЕТИКИ КЪ РѢШЕНІЮ НѢКОТОРЫХЪ ВОПРОСОВЪ.

ГЛАВА I.

ОБЪ ИМЕНОВАННЫХЪ ЧИСЛАХЪ.

Объ именованной единицѣ и именованномъ числѣ. — Мѣры принятыя въ Россіи. — Мѣры принятыя во Франціи и въ Англіи. — Раздробленіе именованныхъ чиселъ. — Превращеніе именованныхъ чиселъ. — Сложеніе и вычитаніе именованныхъ чиселъ. — Умноженіе именованныхъ чиселъ. — Дѣленіе именованныхъ чиселъ.

Объ именованной единицѣ и именованномъ числѣ.

370. Къ сказанному въ §§ 138 и 139 прибавимъ, что главныя величины, разсматриваемыя въ Математикѣ, суть: *протяженіе* или длина, *поверхность* или *площадь*, *объёмъ*, *вѣсъ*, *время*.

Чтобы измѣрить каждую изъ этихъ величинъ, должно сравнить ее съ какою нибудь однородною съ ней единицею. Единица, условно всѣми принятая для измѣренія какой нибудь величины, называется *именованною единицею* или *мѣрою*.

Отсюда, *именованное цѣлое число есть одна или нѣсколько именованныхъ единицъ, именованное дробное число есть одна или нѣсколько частей именованной единицы.*

Мѣры принятыя въ Россіи.

371. Мѣры протяженія или линейныя.—*Миля* (географическая)=7 верстамъ, *верста*=500 саженямъ, *сажень*=7 футамъ, *футъ*=12 дюймамъ, *дюймъ* *) = 10 линіямъ. Кромѣ того, *сажень*=3 аршинамъ, *аршинъ*=4 четвертямъ, *четверть*=4 вершкамъ, *вершокъ*=8 восьмымъ долямъ.

Изъ этого видно, что $1^{\text{сажень}} = 84^{\text{дюйм.}} = 48^{\text{верш.}}$; также $1^{\text{арш.}} = 16^{\text{вершк.}}$

372. Мѣры поверхностей или квадратныя. — *Квадратная миля*=квадрату (четыреугольникъ имѣющій всѣ стороны равныя и углы прямые), сторона котораго есть линейная миля т. е. 7 верстъ; слѣдовательно *квадратная миля* $= 7 \times 7 = 49$ □ верстамъ. *Квадратная верста* = квадрату, въ сторонѣ котораго одна линейная верста или 500 сажень, слѣдовательно 1 □ *верста* $= 500 \times 500 = 500^2 =$ 250000 □ саженямъ. *Квадратная сажень* = квадрату, въ сторонѣ котораго 7 футовъ; слѣдовательно 1 □ *сажень* $= 7^2 =$ 49 □ футамъ, и т. д. Такимъ образомъ: 1 □ *сажень* = 9 □ аршинамъ, 1 □ *аршинъ* = 256 □ вершкамъ, и т. д.

Принятая въ Россіи поземельная мѣра есть *десятина*. Она = 2400 □ саженямъ.

373. Мѣры объемовъ или кубическія.—*Кубическая сажень*=кубу (вмѣстимость закрытаго ящика, внутреннія стороны котораго суть равные квадраты), ребро котораго въ одну сажень т. е. въ 3 аршина; слѣдовательно 1 *куб. сажень* $= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ куб. аршинамъ. Или она же равна кубу, ребро котораго въ 7 футовъ, слѣдовательно 1 *куб. сажень* $= 7^3 = 343$ куб. футамъ. Точно также, 1 *куб. футъ* $= 12^3 = 1728$ куб. дюймамъ, 1 *куб. дюймъ* $= 10^3$ = 1000 куб. линіямъ и т. п.

374. Мѣры вѣса.—(Торговый вѣсъ). *Берковецъ* = 10 пудамъ, *пудъ*=40 фунтамъ, *фунтъ*=32 лотамъ, *лотъ*=3 золотникамъ, *золотникъ*=96 долямъ. (Аптекарскій вѣсъ) *фунтъ* =

*) Нашъ дюймъ=англійскому дюйму, который=$\frac{1}{36}$ длины секуднаго маятника въ Лондонѣ, при температурѣ 13° R. (Реомюра).

12 унціямъ, *унція* = 8 драхмамъ, *драхма* = 3 скруполамъ, *скруполъ*=20 гранамъ.

Торговый фунтъ равенъ вѣсу 25 куб. дюймовъ воды при $13^1/_3{}^0$ R. Аптекарскій фунтъ меньше торговаго (96 золот.), онъ содержитъ въ себѣ 84 золотника.

375. Мѣры сыпучихъ веществъ. — *Четверть* или куль=2 осьминамъ, *осьмина*=4 четверикамъ, *четверикъ* или мѣра=8 гарнцамъ.

Четверикъ вмѣстимостію равенъ 1600 куб. дюймамъ.

Мѣры жидкихъ веществъ.—*Бочка* содержитъ 40 ведеръ, *ведро*=10 штофамъ, *штофъ*=2 кружкамъ, *кружка*=5 чаркамъ.

Ведро вмѣстимостію равно 750 куб. дюймамъ.

376. Монеты.—(Золотыя) *Имперіалъ*=10 рублямъ, полуимперіалъ=5 рублямъ. (Серебряныя) Рубль или цѣлковый =100 копѣйкамъ, *полтинникъ*=50 копѣйкамъ, *четвертакъ* = 25 копѣйкамъ. Эти монеты чеканятся изъ серебра $83^1/_3$ пробы. Затѣмъ *двугривенный*=20 копѣйкамъ, *пятіалтынный*=15 коп., *гривенникъ*=10 коп., *пятачекъ*=5 копѣйкамъ. Послѣднія монеты служатъ для размѣна и дѣлаются изъ серебра низшаго достоинства 48-й пробы.

(Мѣдныя) Изъ пуда мѣди чеканится монеты на 32 рубля *) Монеты бываютъ въ 5, 3, 2, 1, $^1/_2$, $^1/_4$ копѣйки. (Бумажныя.) *Кредитные билеты*: представляющіе собой цѣнность въ 100 рублей *радужнаго* цвѣта съ портретомъ Императрицы Екатерины II-й; 50 рублей *сѣраго* цвѣта съ портретомъ Императора Петра I-го; 25 рублей *бураго* цвѣта съ портретомъ царя Алексѣя Михайловича; 10 рублей *краснаго* съ портретомъ царя Михаила Федоровича; 5 рублей *синяго* съ портретомъ Великаго Князя Дмитрія Іоанновича Донскаго; 3 рублей *зеленаго* цвѣта и 1 рубль *желтаго* цвѣта.

Примѣчаніе. — Въ золотой монетѣ каждый рубль цѣннѣе рубля въ серебряной монетѣ, такъ что 1 руб. золот. = 1 р. 3 коп. серебр. Эти 3 копѣйки называются *лажемъ* на серебро; поэтому расчету имперіалъ=10 р. 30 к., полуимперіалъ=5 р. 15 к. Впрочемъ лажъ величина не постоянная; она увеличивается и уменьшается, почему и золотыя день-

*) Смотри упражненіе 10-е въ концѣ главы.

ги соотвѣтствуютъ то большему то меньшему числу серебряныхъ копѣекъ.

377. Мѣры времени.—*Вѣкъ* или столѣтіе=100 годамъ. Годомъ называется промежутокъ времени, въ который земля совершаетъ полное обращеніе вокругъ солнца. Сутками же называется промежутокъ времени, въ который земля совершаетъ полный оборотъ около своей оси. *Простой годъ* = 365 суткамъ (днямъ), а *високосный годъ*=366 суткамъ. Високосный годъ наступаетъ по прошествіи каждыхъ трехъ простыхъ годовъ. Это потому, что во время полнаго оборота земли около солнца, земля успѣваетъ повернуться около своей оси собственно 365,24222....разъ, или приблизительно $365\frac{1}{4}$ разъ. Стало быть, считая три года по 365 дней, на четвертый годъ, пополняя накопившуюся за три года ошибку, слѣдуетъ считать не 365 дней, а 366.

Далѣе, *годъ* состоитъ изъ 12 мѣсяцевъ. Мѣсяцы имѣютъ не одинаковое число дней: Январь, Мартъ, Май, Іюль, Августъ, Октябрь и Декабрь имѣютъ 31 день; Апрѣль, Іюнь, Сентябрь и Ноябрь 30 дней. Февраль же простаго года имѣетъ 28 дней, а високоснаго года 29 дней.

День (сутки)=24 часамъ, *часъ*=60 минутамъ, *минута*=60 секундамъ, *секунда* подраздѣляется на десятыя, сотыя, и т. д. доли.

Кромѣ того *годъ* круглымъ числомъ подраздѣляется на 12 мѣсяцевъ, *мѣсяцъ* на 30 дней. *Недѣля*=7 днямъ. Въ году недѣль круглымъ числомъ 52.

378. Мѣра дугъ окружности.—*Окружность* всякаго круга раздѣляется на 360 градусовъ, *градусъ* (°)=60 минутамъ, *минута* (′)=60 секундамъ, *секунда* (″) подраздѣляется на десятыя, сотыя и т. д. доли.

Примѣчаніе.—Бумага измѣряется стопами и дестями. *Стопа*=20 дестямъ *десть*=24 листамъ.

379. Изъ обзора принятыхъ въ Россіи мѣръ, мы видимъ, что по каждому роду величинъ есть сравнительно мѣры *крупнаго* наименованія и есть мѣры *мелкаго* наименованія. Напримѣръ, сажень относительно фута есть мѣра крупнаго наименованія, а футъ относительно сажени—мѣра мѣлкаго наименованія.

Кромѣ того усматриваемъ, что содержанія мѣръ мелкихъ въ крупныхъ, по одному и тому же роду величинъ, *разно-*

образны. Числа выражающія эти содержанія называются *единичными отношеніями.* Такимъ образомъ, единичныя отношенія: линейной сажени къ линейному футу есть число 7 или $\frac{7}{1}$, линейнаго фута къ линейному дюйму есть число 12 или $\frac{12}{1}$. Единичное отношеніе квадратной сажени къ квадратному дюйму есть 84^2, или $\frac{84^2}{1} = \frac{7056}{1}$. Обратно, единичное отношеніе линейнаго фута къ линейной сажени есть $\frac{1}{7}$, единичное отношеніе линейнаго дюйма къ линейному футу есть $\frac{1}{12}$, единичное отношеніе квадратнаго дюйма къ квадратной сажени есть $\frac{1}{84^2} = \frac{1}{7056}$.

Мѣры принятыя во Франціи и въ Англіи.

380. Съ 1801 года во Франціи, старая система мѣръ замѣнена была новою, изобрѣтенною въ 1795 году. При составленіи новой системы имѣлось въ виду слѣдующее: 1) избрать одну основную, неизмѣняющуюся мѣру, изъ которой бы выводились всѣ мѣры для измѣренія разнаго рода величинъ и 2) устранить разнообразіе единичныхъ отношеній между крупными и мелкими мѣрами.

Для этого поступили такъ:

Съ возможною точностію измѣрили длину небольшой дуги парижскаго миридіана и по ней вычислили длину $\frac{1}{4}$ этого миридіана. Потомъ эту длину раздѣлили на 10000000 частей и полученную одну десяти-милліонную часть длины четверти парижскаго миридіана, назвавъ *метромъ* (metre) приняли основною мѣрою для всѣхъ мѣръ.

Этотъ же метръ, какъ выражающій нѣкоторую длину, принятъ за *единицу мѣръ протяженія.*

Чтобы получить единицу мѣръ вѣса, построили кубъ, имѣющій внутреннее ребро равное $\frac{1}{100}$ метра и такой вмѣстимости кубъ наполнили чистой, перегнанной водой при температурѣ 4° (Цельса), т. е. при набольшей плотности воды. Вѣсъ такого количества воды, назвавъ *граммомъ* (gramme), приняли за *единицу мѣръ вѣса.*

Для полученія единицы мѣръ жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ, взяли кубъ, имѣющій внутреннее ребро равное $\frac{1}{10}$ метра и назвавъ вмѣстимость такаго куба *литромъ* (litre), приняли его за *единицу мѣръ жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ*:

Точно также получилась и мѣра *стеръ* (stere), принятая за единицу при измѣреніи количества *дровъ*, *торфа* и т. п. Это есть кубъ, ребро котораго равно 1 метру.

За единицу квадратныхъ мѣръ или мѣръ *поземельныхъ* принять аръ (are). Это есть квадратъ сторона котораго равна 10 метрамъ.

Единицу монетъ также поставили въ зависимость отъ метра, принявъ для нея монету *франкъ* (franc), равный по вѣсу 5 граммамъ серебра и имѣющій въ діаметрѣ 0,023 метра.

381. Изъ сказаннаго видно, что всѣ единицы разнаго рода измѣреній поставлены въ зависимость отъ основной мѣры метра. И когда такимъ образомъ получились единицы разнаго рода мѣръ; то для составленія изъ нихъ крупныхъ и мелкихъ мѣръ, приняли вездѣ единичное отношеніе равнымъ 10. Напримѣръ, взявъ метръ 10, 100, 1000, 10000 разъ будутъ послѣдовательно получаться мѣры крупныя, и раздѣляя метръ на 10, 100, 1000, частей будутъ послѣдовательно получаться мѣры мелкія. Поэтому система французскихъ мѣръ называется *десятичною*.

Но, чтобы недавать этимъ производнымъ мѣрамъ произвольныхъ, разнообразныхъ названій и чтобы изъ самаго названія какой нибудь мѣры видно было, отъ какого рода именованной единицы и какимъ образомъ она получилась, воспользовались слѣдующими словами, которыя и прибавляютъ къ принятой единицѣ:

миріа означаетъ . . .	10000,
кило	1000,
гекто	100,
дека	10,
деци	$\frac{1}{10}$,
санти	$\frac{1}{100}$,
милли	$\frac{1}{1000}$.

Такимъ образомъ, если принята единица, напримѣръ, граммъ, то мѣру въ 1000 граммовъ называютъ *килограммъ*

382. Перечислимъ болѣе употребительныя изъ французскихъ мѣръ, сравнивая нѣкоторыя изъ нихъ съ русскими мѣрами.

1°. Литейныя мѣры.

Міріаметръ = 10000 метрамъ,
Километръ = 1000 — = 468,7 рус. саж., или почти 0,9 рус. версты
Гектометръ = 100 —
Декаметръ = 10 —

линейная единица *метръ* = 39,37 рус. дюйм., или почти $1\frac{2}{3}$ аршина.

Дециметръ = 0,1 метра
Сантиметръ = 0,01 — = 4,724 рус. линій.
Миллиметръ = 0,001 — = 0,4724 — —

2°. Мѣры квадратныя или поземельныя.

Гектáръ = 100 арамъ = 0,9153 рус. десятин.
принятая единица *аръ* = 21,97 рус. □ саж.
Центіаръ = 0,01 *ара* = 10,764 рус. □ фут.

3°. Мѣры кубическія или объемовъ.

Декастеръ = 10 стерамъ = 1,0296 рус. куб. саж.
принятая единица *стеръ* = 35,317 рус. куб. фут.

4°. Мѣры вѣса.

Килограммъ = 1000 граммамъ = 244427 рус. фунт.
Гектограммъ = 100 граммамъ
Декаграммъ = 10 граммамъ
принятая единица *граммъ* = 0,23465 рус. золотн.
Дециграммъ = 0,1 грамма,
Сантиграммъ = 0,01 —
Милиграммъ = 0,001 — = 0,00023 рус. золот.

5°. Мѣры жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ.

Гектолитръ = 100 литрамъ = 3,844 рус. четверикамъ
Декалитръ = 10 литрамъ = 6,509 рус. штофамъ
принятая единица *литръ* = 61,027 рус. куб. дюймамъ.
Децилитръ = 0,1 литра
Сантилитръ = 0,01 — = 0,6103 рус. куб. дюймамъ.

6°. Монеты.

(Золотыя) Въ 100, 50, 40, 20, 10 и 5 франковъ.

(Серебряныя) Въ 5, въ 2, въ 1 франкъ = 25 коп. сер., въ $^1/_2$, въ $^1/_4$ франка

Сантимъ = 0,01 франка = $^1/_4$ коп. сер.

383. Мѣры употребляемыя въ Англіи. — (Монеты). *Фунтъ стерлинговъ* = 20 *Шиллингамъ* = 6 руб. 26 коп. *Шиллингъ* = 12 пенсамъ = 31$^1/_4$ коп. сер. Золотая *гинея* = 21 шиллингамъ, золотой *соверенъ* = 20 шиллингамъ. Серебряная *крона* = 5 шиллингамъ. (Линейныя) *миля* = 1760 ярдамъ, *ярдъ* = 3 футамъ, *футъ* = 12 рус. дюйм. (Поверхн.) *Акръ* = 4840 □ ярдамъ = 0,3704 рус. десятины. (Сыпучихъ и жидкихъ тѣлъ) *Ластъ* = 2 тоннамъ, *тонна* = 320 галлонамъ, *галлонъ* = 8 пинтамъ = 0,3694 ведра = 0,1732 четверика. (Вѣса) *Тонна* = 20 центнерамъ, *центнеръ* = 4 квартерамъ, *квартеръ* = 28 фунтамъ. Англійскій фунтъ = 1,10763 рус. фунта.

384. При измѣреніе величинъ, числа выражающія измѣряемыя величины могутъ получаться именованными несоставными и именованными составными. Когда именованное число содержитъ въ себѣ единицы одной мѣры, то оно называется *несоставнымъ*, напр. 216 верстъ, 125$^1/_4$ пудовъ. Если же оно содержитъ единицы разныхъ однородныхъ мѣръ, то оно называется *составнымъ*, напр.

$2^{\circ}\ 15'16'',5$ или $5^{\text{пуд.}}\ 2^{\text{фун.}}\ 18^{\text{зол.}}$

385. При вычисленіяхъ надъ именованными несоставными и составными числами, первой потребностью является, умѣть переводить числа крупныхъ мѣръ въ мелкія мѣры и обратно. Поревод̀ъ числа состоящаго изъ крупныхъ мѣръ въ мелкія мѣры называется *раздробленіемъ*. Переводъ числа состоящаго изъ мелкихъ мѣръ въ крупныя называется *превращеніемъ*.

Раздробленіе именованныхъ чиселъ.

386. *Чтобы число составленное изъ крупныхъ мѣръ, привесть въ мелкія мѣры, должно число единицъ крупныхъ мѣръ умножить на единичное отношеніе данной крупной мѣры къ искомой мелкой.*

Дѣйствительно, положимъ, дано число N крупныхъ мѣръ и требуется привесть т. е. раздробить ихъ въ мелкія. Зная,

что въ каждой единицѣ числа N крупныхъ мѣръ заключается извѣстное число, положимъ m, мелкихъ мѣръ, заключаемъ, что мелкихъ мѣръ получится въ m разъ болѣе числа N крупныхъ мѣръ; а потому $N \times m$ дастъ искомое число мелкихъ мѣръ.

Слѣдовательно *раздробленію вспомогательнымъ дѣйствіемъ служитъ умноженіе.*

Примѣръ I.—*Дано несоставное именованное число* 785 *сажень; требуется раздробить его въ дюймы.*

Зная (§ 371), что 1 саж. = 7 футамъ, раздробимъ сначала данное число въ футы, будетъ

$$785^{\text{саж.}} = 785 \times 7 = 5495^{\text{фут.}};$$

далѣе, зная, что 1 футъ = 12 дюймамъ, полученное число футовъ приведемъ въ дюймы, будетъ

$$5495^{\text{фут.}} = 5495 \times 12 = 65940^{\text{дюйм.}}.$$

Слѣдовательно

$$785^{\text{саж.}} = 65940 \text{ дюйм.}$$

Или можно тоже сдѣлать прямо

$$785^{\text{саж.}} = 785 \times 7 \times 12 = 785 \times 84 = 65940^{\text{дюйм.}}$$

Примѣръ II. — *Дано* $\frac{1}{4}$ *версты обратить въ дюймы.*

На основаніи предъидущаго, поступаю такъ:

$$\frac{1}{4}^{\text{верст.}} = \frac{1}{4} + 500 = \frac{500^{\text{саж.}}}{4}; \quad \frac{500^{\text{саж.}}}{4} = \frac{500}{4} \times 7 = \frac{500 \times 7^{\text{фут.}}}{4};$$

$$\frac{500 \times 7^{\text{фут.}}}{4} = \frac{500 \times 7}{4} \times 12 = \frac{500 \times 7 \times 12^{\text{дюйм.}}}{4} = 10500^{\text{дюйм.}}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{4}^{\text{верст.}} = 10500^{\text{дюймамъ}}.$$

Или короче

$$\frac{1}{4}^{\text{верст.}} = \frac{1 \times 500 \times 7 \times 12}{4} = \frac{1 \times 500 \times 7 \times 3}{1} = 10500^{\text{дюйм.}}.$$

Примѣръ III.—*Дано составное именованное число*: 160 *верстъ* 5 *сажень* 3 *фута* 5,2 *дюйма привести въ дюймы.*

Въ этомъ случаѣ удобнѣе поступать такъ: число болѣе крупныхъ мѣръ раздробить въ слѣдующія данныя мелкія, придать къ результату данныя того же наименованія мѣры, затѣмъ, полученныя мѣры опять раздробить въ слѣдующія данныя мелкія, придать къ полученному числу данныя того же наименованія и т. д.

Располагаютъ вычисленіе такъ:

$$
\begin{array}{rl}
 & 180^{\text{верст.}}\ 5^{\text{саж.}}\ 3^{\text{фут.}}\ 5{,}2^{\text{дюйм.}} \\
\times & 500 \\
\hline
 & 90000^{\text{саж.}} \\
+ & 5 \\
\hline
 & 90005^{\text{саж.}} \\
\times & 7 \\
\hline
 & 630035^{\text{фут.}} \\
+ & 3 \\
\hline
 & 630038^{\text{фут.}} \\
\times & 12 \\
\hline
 & 1260076 \\
 & 630038 \\
\hline
 & 7560456^{\text{дюйм.}} \\
+ & 5{,}2 \\
\hline
 & 7560461{,}2^{\text{дюйм.}}
\end{array}
$$

Слѣдовательно $180^{\text{верст.}}\ 5^{\text{саж.}}\ 3^{\text{фут.}}\ 5{,}2^{\text{дюйм.}} = 7560461{,}2$ дюймамъ.

Превращеніе именованныхъ чиселъ.

387. *Чтобы число составленное изъ мелкихъ мѣръ привесть въ крупныя мѣры, должно число единицъ мелкихъ мѣръ раздѣлить на единичное отношеніе искомой крупной мѣры къ данной мелкой, или, что тоже, умножить число единицъ мелкихъ мѣръ на единичное отношеніе данной мелкой мѣры къ искомой крупной.*

Дѣйствительно, положимъ, дано число N мелкихъ мѣръ и требуется превратить ихъ въ крупныя. Положимъ намъ извѣстно, что m, данныхъ мелкихъ мѣръ составляютъ одну искомую крупную, то очевидно число искомыхъ крупныхъ мѣръ найдемъ, если узнаемъ, сколько разъ число m будетъ заключаться въ N, а потому N: m дастъ искомое число круп-

ныхъ мѣръ и слѣдовательно *превращенію вспомогательнымъ дѣйствіемъ служитъ дѣленіе.*

Примѣръ I. — *Дано несоставное число 65940 дюймовъ, требуется превратить въ сажени.*

Зная (§ 371), что 12 дюймовъ = 1 футу, перевожу сначала дюймы въ футы, будетъ

$$65940^{\text{дюйм.}} = \frac{65940^{\text{фут.}}}{12};$$

далѣе, зная, что $7^{\text{фут.}} = 1$ сажн., полученное число футовъ перевожу въ сажени, будетъ

$$\frac{65940^{\text{фут.}}}{12} = \frac{65940^{\text{саж.}}}{12 \times 7};$$

слѣдовательно

$$65940^{\text{дюйм.}} = \frac{65940}{12 \times 7} = 785^{\text{саж.}}.$$

Или прямо

$$65940^{\text{дюйм.}} = \frac{65940}{84} = 785^{\text{саж.}}.$$

Примѣръ II. — *Дано* $3^1/_2$ *золотника вычислить въ пудахъ.*

На основаніи предъидущаго и § 374 поступаю такъ

$$3^1/_2{}^{\text{зол.}} = \frac{7}{2} = \frac{7}{2 \times 96 \times 40} = \frac{7^{\text{пуд.}}}{7680}.$$

Примѣръ III. — *Дано* 1,25 *гарнца привести въ четверти.*

Поступаю такъ

$$1{,}25^{\text{гарн.}} = \frac{1{,}25}{8 \times 8} = \frac{1{,}25}{64} = 0{,}019^{\text{четверти.}}$$

Примѣръ IV. — *Дано составное именованное число; 1 пудъ 5 фунтовъ 2 лота 1 золотникъ, требуется выразить въ пудахъ.*

Вычисленіе располагаю такъ:

$$1^{\text{золот.}} = \frac{1^{\text{пуд.}}}{96 \times 40}$$

$$2^{\text{лот.}} = \frac{2}{32\times 40}{}^{\text{пуд}},$$

$$5^{\text{фукт.}} = \frac{5}{40}{}^{\text{пуд.}}$$

складывая эти величины съ даннымъ 1 пудомъ, получимъ

$$1^{\text{пуд.}}\ 5^{\text{фун.}}\ 2^{\text{лот.}}\ 1^{\text{зол.}} = 1 + \frac{1}{96\times 40} + \frac{2}{32\times 40} + \frac{5}{40},$$

или

$$1^{\text{пуд.}}\ 5^{\text{фун.}}\ 2^{\text{лот.}}\ 1^{\text{зол.}} = 1 + \frac{1+6+480}{96\times 40} = 1\frac{487}{3840}{}^{\text{пуд}}$$

Примѣръ V. — *Дано 12837,5 вершка, требуется узнать сколько въ нихъ заключается аршинъ, сажень, верстъ и т. д.*

Дѣйствіе располагаютъ такъ

12837,5 верш.	16		
128	802 арш.	3	
37	6	267 саж.	
32	20		
5,5 верш.	18		
	22		
	21		
	1 арш.		

изъ этого вижу, что

$$12837{,}5^{\text{верш.}} = 267^{\text{саж.}}\ 1^{\text{арщ.}}\ 5{,}5^{\text{верш.}}$$

388. *Примѣчаніе.* — Въ слѣдствіи того, что единичныя отношенія во французской системѣ однообразны и при томъ они = 10, раздробленіе и превращеніе французскихъ мѣръ совершается весьма легко. Все дѣло сводится на увеличеніе или уменьшеніе даннаго числа въ 10, 100, 1000 и т. д. разъ.

1°. Дано, напримѣръ, 34 метра выразить въ миллиметрахъ; имѣемъ

$$34^{\text{метр.}} = 340^{\text{дец. метр.}} = 3400^{\text{цен. метр.}} = 34000^{\text{миллиметръ.}}$$

2^0. Дано 3 центиграмма выразить въ доляхъ килограмма; имѣемъ

3 цен. грам. = 0,3 ден. грам. = 0,03 грам. = 0,00003 килограм.

3^0. Дано 5 гектолитровъ 4 декалитра 2 литра 9 сантилитровъ перевести въ литры.

Поступаю такъ:

5 гектолитр.	=	500 литр.
4 дек. литр.	=	40
2 литра.	=	2
9 цен. литр.	=	0,09
		542,09 литр.

слѣдовательно

5 г.л. 4 д.л. 2 л. 9 ц.л. = 542,09 литровъ.

Сложеніе и вычитаніе именованныхъ чиселъ.

389. Сложеніе и вычитаніе несоставныхъ именованныхъ чиселъ, имѣющихъ притомъ единицы одной мѣры, не представляютъ ни какой разницы отъ сложенія и вычитанія отвлеченныхъ чиселъ. Но, если единицы въ данныхъ несоставныхъ именованныхъ числахъ будутъ разной мѣры, то вопросъ всегда можно предварительно подвесть подъ предъидущій случай. Такъ, положимъ дано сложить 16 *пудовъ* съ 104 *фунтами*, или изъ 16 *пудовъ* вычесть 104 *фунта*, тогда въ обоихъ случаяхъ предварительно 104 фунта превращаютъ въ пуды и тѣмъ приводятъ вопросы къ сложенію 16 *пудовъ* съ $2^3/_5$ *пуда* и къ вычитанію изъ 16 *пудовъ* $2^3/_5$ *пуда*.

Въ слѣдствіи сказаннаго, мы въ дальнѣйшемъ ограничимся изложеніемъ сложенія и вычитанія составныхъ именованныхъ чиселъ.

390. Сложеніе. — *Чтобы сложить два или нѣсколько составныхъ именованныхъ чиселъ, ихъ подписываютъ одно подъ другимъ такъ, чтобы мѣры одинаковыхъ наименованій приходились въ одномъ вертикальномъ ряду, при этомъ соблюдая правило* § 19. *Затѣмъ, сложеніе начинаютъ съ мелкихъ мѣръ.*

Начинать сложеніе съ мелкихъ мѣръ удобнѣе потому, что когда при сложеніи мелкихъ мѣръ, получится ихъ столько, что они могутъ составить одну или нѣсколько крупныхъ мѣръ, то чтобы крупныя мѣры можно было заблаговременно исключить и передать къ своему ряду, а излишекъ мелкихъ мѣръ, если таковой будетъ, подписывается подъ своимъ рядомъ.

Такъ, напримѣръ, дано сложить 4 *дня* 18 *часовъ* 5 *минутъ* 58,95 *секундъ* съ 1 *днемъ* 21 *часами* 35,07 *секундами*.

Данныя располагаютъ такъ:

I		I		I	
4	дн.	18	час.	5	мин.	58,95	сек.
1		21		0		35,07	
6		15		6		34,02	

слѣдовательно

$$(4^{д.}\ 18^{ч.}\ 5^{м.}\ 58{,}95^{с.}) + (1^{д.}\ 21^{ч.}\ 35{,}07^{с.}) = 6^{д.}\ 15^{ч.}\ 6^{м.}\ 34{,}02^{с.}.$$

391. Вычитаніе. — *Чтобы вычесть одно именованное составное число изъ другаго, вычитаемое подписываютъ подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы мѣры одинаковыхъ наименованій приходились въ одномъ вертикальномъ ряду, соблюдая при этомъ правило* § 27. *Затѣмъ вычитаніе начинаютъ съ мелкихъ мѣръ.*

Начинать вычитаніе съ мелкихъ мѣръ удобнѣе потому, что когда въ уменьшаемомъ дано будетъ какихъ нибудь мѣръ менѣе чѣмъ въ вычитаемомъ, то чтобы заблаговременно можно было, взявъ одну единицу отъ слѣдующихъ крупныхъ мѣръ уменьшаемаго, придать къ недостаточному числу мелкихъ мѣръ и тѣмъ сдѣлать возможнымъ продолженіе вычитанія.

Примѣръ I. — Дано изъ 5 *верстъ* 125 *сажень* 3 *футовъ* 0,35 *дюймовъ* вычесть 1 *версту* 456 *сажень* 6 *футовъ* 5,5 *дюйма*.

Данныя располагаютъ такъ:

		500		7		11 10	
5	верс.	125	саж.	3	фут.	0,35	дюйм.
1		456		6		5,5	
3		168		3		6,85	

слѣдовательно

$$(5^{в.}\ 125^{с.}\ 3^{ф.}\ 0{,}35^{д.}) - (1^{в.}\ 156^{с.}\ 6^{ф.}\ 5{,}5^{д.}) = 3^{в.}\ 168^{с.}\ 3^{ф.}\ 6{,}85$$

Примѣръ II — На сколько поверхность въ 365 *десятинъ* 25 □ *сажень* болѣе поверхности въ 968959 □ *футовъ*?

Очевидно, что предварительно должно 968959 □ футовъ обратить въ □ сажени,

$$968959\,\square^{ф.} = \frac{968959}{49}\square^{с.} = 19754\tfrac{23}{49}\square^{с.},$$

а это составитъ

8 десятинъ $554\frac{23}{49}$ □ сажени;

слѣдовательно, остается совершить вычитаніе,

$$\begin{array}{rr} 365^{\text{дес.}} & {}^{2400}25\square^{с.} \\ 8 & 554\frac{23}{49} \\ \hline 356 & 1870\frac{26}{49}. \end{array}$$

Такимъ образомъ первая поверхность болѣе второй на 356 дес. $1870\frac{26}{49}$ □ сажень.

Умноженіе именованныхъ чиселъ.

392. Основываясь на опредѣленіи умноженія въ § 29, можемъ сказать, что отъ умноженія именованнаго числа на число отвлеченное произведеніе всегда должно быть однородно съ множимымъ; т. е. въ результатѣ должны всегда получаться тѣ же мѣры только въ извѣстное число разъ большемъ количествѣ. Въ слѣдствіи этого, при умноженіи именованныхъ чиселъ, чтобы произведеніе получалось однороднымъ съ множимымъ, необходимо положить, *что множитель всегда долженъ быть числомъ отвлеченнымъ*. Поэтому, если въ задачахъ относящихся къ умноженію именованныхъ чиселъ, множитель и предлагается часто въ видѣ именованнаго числа, то зная, что онъ долженъ быть числомъ отвлеченнымъ, должно разсмотрѣть: единицы какой мѣры, по условію вопроса, соотвѣтствуютъ единицѣ отвлеченнаго множителя: послѣ чего, если множитель составной или данъ не въ тѣхъ мѣрахъ, его должно привести въ тѣ мѣры и потомъ, отбросивъ наименованіе, умножить множимое на полученное число.

Пояснимъ сказанное нѣсколькими примѣрами:

Примѣръ I.—*Экипажное колесо во время переѣзда отъ* A *къ* B *сдѣлало* 325 *оборотовъ, длина окружности колеса равна* 3 *аршинамъ* $7^1/_2$ *вершкамъ; требуется опредѣлить разстояніе* AB.

По смыслу задачи видно, что искомое разстояніе найдется, когда мы длину окружности колеса повторимъ столько разъ, сколько оборотовъ сдѣлано было колесомъ.

Для удобности вычисленія множимое 2 арш. $7^1/_2$ верш., приведемъ въ вершки.

$$2^{\text{арш.}}\ 7^1/_2{}^{\text{верш.}} = 32^{\text{верш.}} + 7{,}5^{\text{верш.}} = 39{,}5^{\text{верш.}};$$

послѣ того $39{,}5^{\text{верш.}}$ повторивъ 325 разъ, получу, что разстояніе

$$AB = 39{,}5^{\text{верш.}} \times 325 = 12837{,}5^{\text{верш.}};$$

или по (§ 387, V) будетъ

$$AB = 12837{,}5^{\text{верш.}} = 267^{\text{саж.}}\ 1^{\text{арш.}}\ 5{,}5^{\text{верш.}}$$

Примѣръ II.—*Если извѣстное число рабочихъ въ* 1 *часъ успѣваетъ подвинуть постройку шоссе на* 2 *аршина* $7^1/_2$ *вершковъ, то на какомъ протяженіи будетъ окончено шоссе въ* 13 *дней* 13 *час.?*

По смыслу задачи видно, что рѣшеніе получится, если 2 аршина $7^1/_2$ вершковъ, т. е. часовую работу повторимъ столько разъ, сколько въ 13 дняхъ 13 часахъ будетъ часовъ. Слѣдовательно, обративъ 13 дней 13 часовъ въ часы и получивъ 325 часовъ, мы тѣмъ найдемъ отвлеченный множитель 325 единицъ, т. е., что $2^{\text{арш.}}\ 7^1/_2{}^{\text{верш.}}$ должно повторить 325 разъ, т. е. $(2^{\text{арш.}}\ 7^1/_2{}^{\text{верш.}}) \times 325$. Затѣмъ, дальнѣйшій ходъ вычисленія и результатъ будутъ тѣ же, что и въ предъидущемъ примѣрѣ.

Примѣръ III.—*Дана желѣзная полоса длиною въ* 1 *сажень* 2 *фута* 3,5 *дюйма и извѣстно, что каждый дюймъ этой полосы вѣситъ* 23 *лота* 2 *золотника; требуется опредѣлить вѣсъ всей полосы.*

По смыслу задачи видно, что искомый вѣсъ будетъ найденъ, если вѣсъ одного дюйма, т. е. 23 лота 2 золотника повторимъ столько разъ, сколько дюймовъ заключается въ 1 сажени 2 фут. 3,5 дюймахъ.

Слѣдовательно, приведя $1^{\text{саж.}}\ 2^{\text{фут.}}\ 3{,}5^{\text{дюйм.}}$ въ дюймы и полученное число принявъ отвлеченнымъ, а также для удобности вычисленія обративъ множимое $23^{\text{лот.}}\ 2^{\text{зол.}}$ въ золот-

ники, останется число золотниковъ умножить на отвлеченнаго множителя. Потомъ, сдѣлавъ превращеніе полученныхъ золотниковъ, получится вѣсъ всей полосы въ окончательномъ видѣ.

Вычисленіе располагаютъ такъ:

$$23^{\text{лот.}}\ 2^{\text{зол.}} = 71^{\text{зол.}},$$

$$1^{\text{саж.}}\ 2^{\text{фут.}}\ 3{,}5^{\text{дюйм.}} = 111{,}5^{\text{дюйм.}},$$

слѣдовательно

$$72^{\text{зол.}} \times 111{,}5 = 7916{,}5^{\text{зол.}};$$

дѣлая превращенія, получимъ

$$\text{вѣсъ полосы} = 2^{\text{пуд.}}\ 2^{\text{фун.}}\ 14^{\text{лот.}}\ 2{,}5^{\text{зол.}}.$$

393. Изъ всего изложеннаго вытекаетъ слѣдующее.

1°. *Произведеніе при умноженіи именованныхъ чиселъ должно быть однородно съ множимымъ.*

2°. *Умноженіе несоставныхъ именованныхъ чиселъ производится также какъ и отвлеченныхъ.*

3°. *При умноженіи именованныхъ чиселъ множитель есть всегда число отвлеченное.*

4°. *Если множимое составное именованное число и множитель малъ, то на него умножаютъ отдѣльно каждыя мѣры множимаго, дѣлая при этомъ надъ получаемыми произведеніями, если то будетъ нужно, превращенія. Въ противномъ случаѣ, удобнѣе множимое раздробить въ мелкія мѣры полученное число умножить на множителя и потомъ совершить умноженія.*

Дѣленіе именованныхъ чиселъ.

394. Изъ опредѣленія § 167 мы знаемъ, что дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію и что дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на частное При умноженіи же именованныхъ чиселъ, въ § 392 и слѣдующихъ, мы видѣли, что произведеніе бываетъ всегда однородно съ множимымъ, ибо множитель всегда есть число отвлеченное. Поэтому, по

всѣмъ вопросамъ относящимся къ дѣленію именованныхъ чиселъ мы можемъ принять слѣдующее:

1⁰. *Когда дѣлитель будетъ данъ числомъ отвлеченнымъ, тогда частное должно получиться числомъ именованнымъ однороднымъ съ дѣлимымъ.*

2⁰. *Когда дѣлитель въ задачѣ будетъ данъ подъ видомъ числа именованнаго разнороднаго съ дѣлимымъ, тогда частное должно получиться числомъ именованнымъ однороднымъ съ дѣлимымъ, ибо дѣлитель, какъ множитель дѣлимаго долженъ быть числомъ отвлеченнымъ.*

3⁰. *Когда дѣлитель въ задачѣ будетъ данъ числомъ именованнымъ однороднымъ съ дѣлимымъ, тогда частное должно получиться числомъ отвлеченнымъ, ибо одинъ изъ множителей именованнаго произведенія долженъ быть числомъ отвлеченнымъ.*

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ:

Примѣръ I.—*Периметръ квадрата равенъ 267 саженямъ 1 аршину 5,5 вершкамъ; требуется опредѣлить длину одной изъ четырехъ равныхъ его сторонъ?*

По смыслу вопроса, периметръ т. е. дѣлимое должно раздѣлить на 4, стало быть дѣлитель прямо данъ числомъ отвлеченнымъ; слѣдовательно частное должно быть однородно съ дѣлимымъ.

Дѣйствіе удобно расположить такъ:

$$267^{\text{саж.}} : 4 = 66^{\text{саж.}} \text{ и въ остаткѣ } 3^{\text{саж.}};$$

обращая $3^{\text{саж.}}$ въ аршины и прикладывая данный 1 аршинъ будетъ

$$10^{\text{арш.}} : 4 = 2^{\text{арш.}} \text{ и въ остаткѣ } 2^{\text{арш.}}$$

бращая $2^{\text{арш.}}$ оставшихся въ вершки и $+ 5{,}5$ вершка, будетъ

$$37{,}5^{\text{верш.}} : 4 = 9{,}375^{\text{верш.}}.$$

Слѣдовательно

$$\text{длина стороны} = 66^{\text{саж.}}\ 2^{\text{арш.}}\ 9{,}375^{\text{верш.}}$$

Примѣръ II.— *За 2 пуда 15 фунтовъ 48 золотниковъ товару заплочено 119 рублей $37\frac{1}{2}$ копѣйки; опредѣлить цѣну одного фунта?*

Очевидно, чтобы опредѣлить искомую цѣну одного фунта, должно узнать сколько рублей и копѣекъ придется на каж-

дый фунтъ товару; слѣдовательно дѣлитель есть отвлеченное число показывающее сколько фунтовъ въ $2^{\text{пуд.}}$ $15^{\text{ун}}$ $48^{\text{зол.}}$; а потому частное должно быть однородно съ дѣлимымъ.

Обращаемъ именованное число выражающее дѣлитель въ фунты,

$$2^{\text{пуд.}}\ 15^{\text{фун.}}\ 48^{\text{зол.}} = 95{,}5^{\text{фун.}},$$

Затѣмъ, для удобности дѣлимое обращаю въ копѣйки,

$$119^{\text{руб.}}\ 37\tfrac{1}{2}{}^{\text{коп.}} = 11937\tfrac{1}{2}{}^{\text{коп.}}.$$

Тогда

$$11937{,}5^{\text{коп.}} : 95{,}5 = 125^{\text{коп.}};$$

или

$1^{\text{фун.}}$ товару стоитъ 1 руб. 25 коп.

Примѣръ III.—*Длина пути между станціями* A *и* B *желѣзной дороги считается въ 9 верстъ 105 саженъ; спрашивается, при движеніи поѣзда отъ* A *къ* B, *сколько разъ должно обернуться колесо вагона, имѣющее въ окружности 1,9 метра?*

Очевидно вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы узнать сколько разъ длина въ 1,9 метра заключается въ длинѣ 9 верстъ 105 сажень.

Предварительно, приведемъ 1,9 метра по § 382 въ дюймы и тоже сдѣлаемъ съ 9 верст. 105 саж. получимъ

$$1{,}9^{\text{метр.}} = 39{,}37 \times 1{,}9 = 74{,}803^{\text{дюйм.}};$$

$$9^{\text{верст.}}\ 105^{\text{саж.}} = 4605^{\text{саж.}},\ 4605^{\text{саж.}} = 4605 \times 84 = 386820^{\text{дюйм.}}.$$

Послѣ чего для рѣшенія вопроса останется

$$386820000 : 74803 = 5171, \ldots\ldots;$$

слѣдовательно колесо обернется, на разстояніи отъ *A* до *B*, почти 5171 разъ.

395. Дополнимъ изложенное слѣдующимъ замѣчаніемъ: когда дѣлимое и дѣлитель въ задачѣ выражены несоставными именованными числами однородными, но разныхъ мѣръ, то ихъ приводятъ предварительно въ одинаковыя мѣры, а далѣе поступаютъ какъ съ отвлеченными числами. Если же данныя будутъ несоставныя именованныя числа, разнородныя, то дѣйствуютъ прямо, какъ съ числами отвлеченными-

Упражненія.

1°. Выразить въ фунтахъ $1^{\text{пуд.}}\ 22^{\text{фунт.}}\ 31^{\text{лот.}}\ 1\frac{1}{2}^{\text{зол.}}$.

2°. Намъ извѣстно, что земля совершаетъ полный оборотъ вокругъ солнца въ 365,24222 дней; узнать сколько заключаетъ въ себѣ часовъ, минутъ, секундъ десятичная часть этого числа?

3°. Нѣкто родился въ 11 часовъ утра 15-го декабря 1801 года, а умеръ въ 1 часъ пополудни 18 марта 1859 года; узнать сколько времени онъ жилъ?

4°. Часы въ сутки отстаютъ на $30^{\text{m}}\ 12{,}05^{\text{s.}}$, спрашивается сколько они отстанутъ въ недѣлю?

5°. Тѣло, движущееся по окружности, употребляетъ на прохожденіе полной окружности $7^{\text{час.}}\ 23^{\text{мин.}}\ 35^{\text{сек.}}$ времени; уснать сколько оно употребитъ времени на прохожденіе дуги въ $57^{0}\ 17'\ 44{,}''57$?

6°. При радіусѣ круга равномъ единицѣ, полуокружность $\pi = 3{,}14159265$. Принявъ это, требуется вычислить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ дугу равную единицѣ.

7°. Найти общую наибольшую мѣру между цѣлой окружностью и дугою въ $25^{0}\ 41'\ 31\frac{4}{13}''$.

8°. Зная, что въ 1 копѣйкѣ серебромъ содержится $3\frac{1}{2}$ копѣйки ассигнаціонныхъ, перевести старый счетъ 2180 руб. 75 коп. ассигнаціями на серебро. Или 8545 руб. $17\frac{3}{4}$ коп. серебромъ перевести на ассигнаціи.

9°. Найти сторону квадрата равнаго по площади одной десятинѣ (въ футахъ).

10°. Если принято изъ одного пуда мѣди чеканить какого нибудь достоинства монеты столько, чтобы сумма стоимостей монетъ составляла 32 рубля (§ 376), то вычислить 1) сколько изъ пуда получится монетъ пятикопѣечныхъ, 2) трехкопѣечныхъ; 3) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ копѣечныхъ?

11°. Найти отношенія: ярда къ метру, акра къ ару, галлона къ литру.

ГЛАВА II.

ПРИЛОЖЕНІЯ АРИѲМЕТИКИ

къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ.

Приложеніе пропорцій къ рѣшенію вопросовъ: простое тройное правило, сложное тройное правило. — Рѣшеніе предъидущихъ вопросовъ способомъ приведенія условій вопроса къ единицѣ. — Правила товарищества. — Опроцентахъ. — Простые проценты. — Сложные проценты. — Учетъ векселей. — Правило смѣшенія.

Приложеніе пропорцій къ рѣшенію вопросовъ.

396. Если изъ условій вопроса будетъ видно, что въ него входятъ четыре величины, три извѣстныя, а четвертая искомая, и всѣ они соединены условіемъ геометрической пропорціональности; то для рѣшенія такаго вопроса достаточно составить геометрическую пропорцію и рѣшивъ ее, найти неизвѣстную величину.

Способъ, по которому изъ вопросовъ составляются пропорціи называется *тройнымъ правиломъ*. Если для рѣшенія вопроса достаточно составить одну пропорцію, то способъ называется *простымъ тройнымъ правиломъ*. Если же для рѣшенія вопроса потребно составить двѣ, три и т. д. пропорціи, то способъ называется *сложнымъ тройнымъ правиломъ*.

397. Прежде чѣмъ приступимъ къ выводу правила, для составленія пропорцій изъ вопросовъ, мы разсмотримъ какого рода можетъ быть зависимость одной величины отъ другой.

1°. Если съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ въ извѣстное число разъ одной величины, другая во столько же разъ будетъ увеличиваться или уменьшаться, то говорятъ, что первая величина *прямо пропорціональна* второй. Напримѣръ:

Плата рабочимъ прямо пропорціональна продолжительности работы.

Время, потребное для прохожденія извѣстнаго пути, прямо пропорціонально длинѣ этого пути.

Длина окружности круга прямо пропорціональна длинѣ радіуса этого круга, и т. п.

2° Если же съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ въ извѣстное число разъ одной величины, другая величина во столько же разъ будетъ уменьшаться или увеличиваться, то такая пропорціональность называется *обратною*. Напримѣръ:

Время, потребное на совершеніе нѣкоторой работы, обратно пропорціонально числу работниковъ.

Число аршинъ матаріи, которое должно купить на извѣстную сумму денегъ, обратно пропорціонально цѣнѣ одного аршина.

Число размаховъ, дѣлаемыхъ въ минуту маятникомъ, обратно пропорціонально длинѣ маятника и т. п.

398. Затѣмъ, при составленіи изъ вопросовъ пропорцій, должно руководствоваться слѣдущимъ:

1°. *Должно наблюдать чтобы въ каждомъ отношеніи были величины однородныя.*

Это потому, что отношеніе есть сравненіе, сравниваться же могутъ только величины однородныя.

2°. *Должно наблюдать, что если въ первомъ отношеніи пропорціи бо́льшій членъ поставленъ первымъ, то чтобы и во второмъ отношеніи бо́льшій членъ былъ первымъ.*

Хотя однимъ изъ членовъ втораго отношенія и будетъ величина неизвѣстная, но, основываясь на сказанномъ въ § 397, всегда можно опредѣлить будетъ ли этотъ членъ болѣе или менѣе другаго.

3°. *Должно пропорцію располагать такъ, чтобы послѣднимъ членомъ приходился неизвѣстный членъ.*

Это возможно, какъ слѣдствіе двухъ первыхъ условій.

Примѣчаніе — Когда пропорція изъ вопроса составлена, тогда вопросъ способомъ тройнаго правила рѣшенъ. Затѣмъ

останется, упростивъ если возможно пропорцію, опредѣлить неизвѣстную величину.

Простое тройное правило.

399. Примѣръ I.—*Грузъ въ 5 пудовъ. при извѣстной системѣ блоковъ, поднимаетъ на извѣстную высоту тяжесть въ 1816 пудовъ, спрашивается сколько употребить груза, чтобы поднять тяжесть въ 12084 пуда?*

Легко различая изъ четырехъ величинъ вопроса тѣ, которыя принадлежатъ къ условію отъ тѣхъ, которыя принадлежатъ собственно къ вопросу, располагаемъ задачу слѣдующимъ образомъ.

(Условіе). . . . $5^{\text{пуд.}}$ . . . . $1816^{\text{пуд. тяж.}}$

(Вопросъ) . . . x 12084

Такъ какъ мы видимъ, что здѣсь пропорціональность величинъ прямая, потому что во сколько разъ тяжесть 12084 пудовъ болѣе тяжести 1816 пудовъ, во столько же разъ и искомый грузъ долженъ быть болѣе 5 пудовъ; то чтобы выполнить условія § 398 и чтобы сдѣлать въ пропорціи неизвѣстный членъ послѣднимъ, число 1816 должно поставить, какъ меньшее, первымъ членомъ потому что x будетъ болѣе другаго ему однороднаго члена. Тогда пропорція

$$1816 : 12084 = 5 : x$$

будетъ рѣшать предложенный вопросъ.

Упрощая пропорцію, получу

$$\frac{454}{3021} = \frac{5}{x},$$

откуда

$$x = \frac{3021 \times 5}{454} = \frac{15105}{454} = 33,26\ldots.$$

слѣдовательно грузъ долженъ быть болѣе $33\frac{1}{4}$ пудовъ.

Примѣръ II.—*Нѣкоторую работу 10 работниковъ окончили въ 5 дней; спрашивается сколько нужно работниковъ, чтобы ту же, работу окончить въ 2 дня?*

Располагаю задачу по предъидущему

$10^{\text{раб.}}$ . . . . . $5^{\text{дней}}$

x 2

Такъ какъ здѣсь пропорціональность обратная, то неизвѣстная величина будетъ болѣе 10 работниковъ, поэтому первымъ членомъ пропорціи должно взять 2. Тогда

$$\frac{2}{5} = \frac{10}{x}$$

будетъ пропорція рѣшающая предложенный вопросъ, изъ которой получимъ, что

$$x = \frac{50}{2} = 25 \ ;$$

значитъ рабочихъ нужно 25 человѣкъ.

Сложное тройное правило.

400. Вопросы, подлежащія рѣшенію сложнаго тройнаго правила, содержатъ въ себѣ, кромѣ неизвѣстной величины, 5 или 7 или 9 и т. д. извѣстныхъ. Слѣдовательно для рѣшенія такихъ вопросовъ, должно составлять 2, или 3, или 4 пропорціи т. е. *по числу паръ однородныхъ величинъ безъ одной.*

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ и выведемъ правило для хода дѣйствій.

Примѣръ I.—*Потребно 15 дней для того, чтобы 12 рабочихъ прорыли каналъ длиною въ 254 сажени; сколько употребятъ дней 18 рабочихъ, чтобы прорыть каналъ длиною въ 1 версту?*

Различая данныя принадлежащія къ условію отъ данныхъ принадлежащихъ къ вопросу и подписывая однородныя величины одну подъ другою, получу

Условіе	$15^{\text{дней}}$	$12^{\text{раб.}}$	$254^{\text{саж.}}$
Вопросъ	x	18.	500

Замѣтивъ, что для рѣшенія вопроса достаточно составить 2 пропорціи, для составленія первой беру 4 величины, составляющія двѣ первыя пары. Такимъ образомъ, не принимаю пока въ расчетъ длину канала т. е. преполагаю, что она въ обоихъ случаяхъ равна 254 саженямъ. По этой причинѣ, неизвѣстную x должно отличить отъ неизвѣстной всего вопроса, какъ не соотвѣтствующую пока всѣмъ условіямъ, для чего и отличаю ее значкомъ. Затѣмъ, разсматривая взаимную связь взятыхъ величинъ, вижу, что между

ними пропорціальность обратная и что x' будетъ менѣе однородной съ ними величины, поэтому пропорцію должно будетъ начать членомъ 18, т. е.

$$\frac{18}{12} = \frac{15}{x'} \ldots\ldots (1)$$

Послѣ того предполагаю, что x' найденъ и разсуждаю такъ: x' выражаетъ число дней, потребныхъ для 18 рабочихъ при 254 саженяхъ работы; при 500 же саженяхъ, число дней должно быть болѣе. Обозначивъ эту неизвѣстную чрезъ x, одинаково съ искомой величиной вопроса, потому что для опредѣленія ея приняты уже всѣ данныя условія; составляю новую пропорцію

$$\frac{254}{500} = \frac{x'}{x} \ldots\ldots (2)$$

Теперь перемноживъ почленно (1) и (2) пропорціи, получаю сложную пропорцію

$$\frac{18 \times 254}{12 \times 500} = \frac{15 \times x'}{x' \times x},$$

въ которой производя сокращенія, получаю

$$\frac{3 \times 127}{2 \times 250} = \frac{15}{x};$$

откуда

$$x = \frac{2 \times 250 \times 15}{3 \times 127} = \frac{7500}{381} = 19{,}73;$$

слѣдовательно почти 20 дней нужно, для исполненія этой работы 18 рабочимъ.

Примѣръ II.—*На 3 печи въ мѣсяцъ выходитъ 4 сажени дровъ, длиною въ 12 вершковъ; опредѣлить сколько отпустить дровъ, длиною въ 5 четвертей, для 12 печей, на* $1\frac{1}{2}$ *мѣсяца.*

Для ясности выписываю задачу по предъидущему

$3^{\text{печ.}}$ . . .	$4^{\text{саж.}}$	$30^{\text{дней}}$	$12^{\text{верш. дл.}}$
12	x	45	20

Замѣтивъ, что для рѣшенія вопроса достаточно составить 3 пропорціи, беру сначала для составленія первой двѣ пары величинъ, изъ которыхъ въ одной парѣ должна быть неизвѣстная величина, напр. 1-ю и 2-ю. Пропорцію составляю руководствуясь прежнимъ, получаю

$$\frac{3}{12} = \frac{4}{x'} \ldots\ldots (1)$$

но x' отсюда найдется при условіи времени 30 дней, а въ 45 дней потребно болѣе дровъ, слѣдовательно, обозначивъ это количество дровъ чрезъ x'' получу

$$\frac{30}{45} = \frac{x'}{x''} \ldots\ldots (2)$$

Отсюда x'' найдется при условіи длины дровъ въ 12 вершковъ, если же дрова будутъ 20 вершковые, то ихъ должо отпускаться менѣе, слѣдовательно

$$\frac{20}{12} = \frac{x''}{x} \ldots\ldots (3)$$

здѣсь x будетъ искомая величина вопроса, ибо для опредѣленія ея введены всѣ данныя изъ условія.

Послѣ того составляя сложную пропорцію получимъ

$$\frac{3\times30\times20}{12\times45\times12} = \frac{4\times x'\times x''}{x'\times x''\times x},$$

или сокращая

$$\frac{1\times1\times10}{3\times1\times12} = \frac{4}{x};$$

откуда

$$x = \frac{3\times12\times4}{10} = \frac{144}{10} = 14{,}4.$$

слѣдовательно дровъ должно отпустить 14, 4 сажени.

401. Разсмотрѣніе изложенныхъ примѣровъ приводитъ къ слѣдующему:

Для рѣшенія вопросовъ принадлежащихъ къ сложному тройному правилу приходится составлять 2, 3, 4 и т. д. пропорціи. Для составленія первой пропорціи берется одна пара однородныхъ величинъ, содержащая неизвѣстную величину, а другая пара какая нибудь изъ данныхъ. Изъ этихъ четырехъ величинъ составляется пропорція руководствуясь при этомъ § 398. *Далѣе, разсматривается пропорціональная зависимость: только что опредѣленной неизвѣстной, двухъ величинъ изъ новой пары и неизвѣстной величины, происходящей отъ введенія условій новой пары. Потомъ опять, составивъ вторую пропорцію, берется опредѣляемая ею величина, новая пара, если таковая будетъ и опредѣляется слѣ-*

дующая неизвѣстная, происходящая отъ введенія еще новыхъ условій, и т. д. Когда такимъ образомъ всѣ условія вопроса будутъ употреблены, то послѣдняя опредѣляемая величина, будетъ величиною отвѣчающею вопросу,

Рѣшеніе предъидущихъ вопросовъ способомъ приведенія вопроса къ единицѣ:

402. Всѣ вопросы, рѣшаемые приложеніемъ пропорцій, рѣшаются скорѣй способомъ приведенія вопроса къ единицѣ.

Вотъ рѣшеніе задачъ по этому способу.

Примѣръ I.—*Резервуаръ воды имѣлъ* 12 *футовъ глубины, когда былъ пространствомъ въ* 630 *квадратныхъ сажень, когда же его расширили и онъ сталъ пространствомъ въ* 3240 *квадр. сажень, то опредѣлить его глубину, если количество воды не измѣнилось?*

Для рѣшенія вопроса разсуждаю такъ:

Если бы разервуаръ вмѣсто 630 □ саж. былъ въ 1 □ сажень, то вода должна была бы подняться и глубина увеличиться въ 630 разъ т. е

$(12\times630)^{\text{фут.}}$ будетъ глубина разервуара въ 1 □ саж.; слѣдовательно, когда поверхность сдѣлается въ 3240 □ сажень, то глубина должна въ 3240 разъ уменьшиться, а потому искомая глубина

$$x = \frac{12\times630^{\text{фут.}}}{3240}$$

Примѣръ II. *На* 3 *печи, въ* 30 *дней, выходитъ* 4 *сажени дровъ* $12^{\text{тн}}$ *вершковыхъ; опредѣлить сколько отпустить дровъ* $5^{\text{тн}}$ *четвертныхъ на* 45 *дней для* 12 *печей.*

Для ясности, эту уже рѣшенную нами задазу въ § 400, располагаю по прежнему.

Изъ этаго заданія очевидно, что если

на 3 печи, въ 30 дней, нужно 12 вершковъ дровъ 4 сажени,

— 1 печь, — 30 — — 12 — — $\frac{4}{3}$ —

— 1 — — 1 день — 12 — — $\frac{4}{3\times30}$ —

на 1 печь, въ 1 день, нужно 1 вершковъ дровъ $\frac{4\times12}{3\times30}$ сажени,

— 1 — — 1 — — 20 — — $\frac{4\times12}{3\times30\times20}$ —

— 1 — — 45 дней, — 20 — — $\frac{4\times12\times45}{3\times30\times20}$ —

— 12 печей — 45 — — 30 — — $\frac{4\times12\times45\times12}{3\times30\times20}$ —.

Такимъ образомъ и получится, что

$$x = \frac{4\times12\times45\times12}{3\times30\times20},$$

а сокращая,

$$x = \frac{144}{10} = 14,4 \text{ сажени.}$$

Другими словами, поступаютъ такъ: выписавъ x, говорятъ, что онъ будетъ равенъ нѣкоторому дробному выраженію, въ числителѣ котораго пишутъ однородную съ х-омъ величину. Далѣе, говорятъ: если столько нужно сажень 12 вершковыхъ дровъ, то дровъ длиною въ 1 вершокъ нужно въ 12 разъ болѣе; почему 12 и приписываютъ множителемъ въ числителя. Потомъ, если столько дровъ нужно на 30 дней, то на 1 день нужно въ 30 разъ менѣе; почему 30 и пишутъ множителемъ въ знаменателѣ. Послѣ того, принимая это количество дровъ для 3 печ., то на 1 печь нужно будетъ менѣе, а потому 3 должно быть дѣлителемъ т. е. множителемъ въ знаменателѣ. Сдѣлавъ все это говорятъ, что *вопросъ приведенъ къ единицѣ условій*. Послѣ чего, полученное выраженіе

$$x = \frac{4\times12}{30\times3}$$

начинаютъ *приводить къ величинамъ вопроса*, говоря: если столько дровъ нужно длиною въ 1 вершокъ, то 20 вершковыхъ нужно будетъ менѣе; потому 20 приписываютъ въ знаменателѣ. Далѣе, если столько дровъ требовалось на 1 день, то на 45 ихъ нужно болѣе; почему 45 будетъ множителемъ числителя. Наконецъ, если послѣднее количество дровъ потребно для 1 печи, то для 12 печей, дровъ нужно въ 12 разъ болѣе; а потому 12 будетъ множителемъ въ числителѣ. Такимъ образомъ достигаютъ до предъидущаго рѣшенія этого вопроса.

403. Изъ всего сказаннаго вывожу слѣдующее правило: *неизвѣстная величина вопроса будетъ равна дробному выраженію числителемъ котораго пишутъ величину однородную съ неизвѣстнымъ. Затѣмъ эта величина проводится къ единицѣ всѣхъ условій, послѣ чего ее начинаютъ приводить къ величинамъ вопроса. При этомъ ее умножаютъ на тѣ величины, подъ вліяніемъ которыхъ она увеличивается и дѣлятъ ее на тѣ величины, подъ вліяніемъ которыхъ она уменьшается.*

Правило товарищества.

404. Если нѣсколько лицъ соединили свои, различной величины, капиталы для какого нибудь предпріятія и по окончаніи онаго, полученную прибыль желаютъ раздѣлить между собою, соотвѣтственно величинѣ каждаго капитала; то подобныя соединенія называются *товариществами*, а опредѣленіе размѣровъ прибылей каждаго—задачами *правила товарищества.*

Примѣръ I.—*Трое сложились своими капиталами. Капиталъ 1-го равенъ 20000 руб. Капиталъ 2-го = 10000. Капиталъ 3-го = 5000. Полученная прибыль отъ оборота соединеннаго капитала =8000 руб. Спрашивается сколько каждый долженъ получить изъ общей прибыли?*

Очевидно, что рѣшеніе получится, раздѣливъ прибыль 8000 на три части пропорціональныя числамъ 20000, 10000, 5000. Но рѣшеніе подобныхъ вопросовъ было уже указано въ §§ 324 и 325; откуда видно, что 8000 руб. должно раздѣлить на части пропорціональныя отношенію 20000 : 10000 : 5000, или 4 : 2 : 1.

Примѣчаніе..—Но въ задачахъ правила товарищества, кромѣ различій въ величинѣ капитала каждаго, капиталы разныхъ лицъ могутъ находиться въ обращеніи разное время. Для опредѣленія прибыли каждаго при условіи разнаго времени поступаютъ такъ:

Примѣръ II.—*Два купца торговали вмѣстѣ и получили прибыли 1700 руб. Первый держалъ 14000 руб. 3 мѣсяца, а второй 21000 руб. 7 мѣсяцевъ. Сколько каждому слѣдуетъ получить прибыли?*

Такъ какъ время пребыванія капиталовъ въ оборотѣ разное, то ихъ предварительно *приводятъ къ единицѣ времени* такъ:

Если 14000 доставили нѣкоторую прибыль въ 3 мѣсяца, то чтобы пріобрѣсть столько же прибыли въ 1 мѣсяцъ, капиталъ очевидно должно утроить, слѣдовательно

въ 1 мѣсяцъ капиталъ 1-го купца $=14000\times3=42000$ руб.

Точно также, если 21000 въ 7 мѣсяцевъ доставили извѣстную прибыль, то для полученія той же прибыли въ 1 мѣсяцъ, капиталъ должно увеличить въ 7 разъ, а потому

въ 1 мѣсяцъ капиталъ 2-го купца $= 21000\times7 = 147000$ руб.

Послѣ того очевидно, что вопросъ сведенъ на Примѣръ I, стало быть прибыль 1700 рублей должна быть раздѣлена на части пропорціональныя числамъ 42000 и 147000, или 42000 : 147000, или 42 : 147. (§§ 324 и 325).

О процентахъ.

405. *Процентомъ* называется прибыль получаемая въ годъ съ каждой сотни капитала. Съ сотни рублей въ годъ можетъ получаться 1, 2, 3, 4 и т. д. рублей, или $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ и т. п. части рубля. Тогда числа 1, 2, 3, 4....., $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ и т. п. называются *таксою процентовъ*. Знакъ процентной таксы есть %. Такъ, если со 100 рублей получается 5 рублей, или со 100 копѣекъ получается 5 копѣекъ, то въ обоихъ случаяхъ такса будетъ 5%. Сумма прибылей съ каждой сотни капитала называется процентными деньгами, или просто *процентами*.

Если по окончаніи одного года обращенія капитала, полученныя за годъ проценты отдѣляются отъ капитала, такъ что капиталъ на второй годъ поступаетъ въ оборотъ въ прежнемъ видѣ, и т. д.; то такой расчетъ называется *простыми процентами*.

Если же по окончаніи года, проценты отъ капитала не отдѣляются, а зачисляются въ капиталъ, такъ что на второй годъ капиталъ поступаетъ въ оборотъ вмѣстѣ съ процентами и новыя проценты наростаютъ и на первоначаль-

ный капиталъ и на проценты перваго года и т. д.; то такой расчетъ называется *сложными процентами.*

406. *Простые проценты.* — Выведемъ формулу, по которой вычисляются процентныя деньги съ какого нибудь капитала, обращавшагося при извѣстной таксѣ нѣкоторое время.

Положимъ, что капиталъ k находился въ оборотѣ при таксѣ $r^0/_0$ нѣкоторое время, положимъ t лѣтъ. Требуется опредѣлить число процентовъ P.

Если съ каждой сотни въ одинъ годъ при таксѣ $r^0/_0$ получается r процентовъ, то со всего капитала k получится процентныхъ денегъ болѣе r во столько разъ, сколько будетъ сотенъ въ капиталѣ k. А чтобы получить число сотенъ капитала k, дѣлимъ его на 100, тогда процентныя деньги за одинъ годъ назвавъ чрезъ p получимъ, что

$$p = \frac{k \times r}{100} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Но, какъ капиталъ пробылъ въ оборотѣ не одинъ годъ а t лѣтъ, то процентовъ за это время будетъ въ t разъ болѣе p; слѣдовательно искомые проценты

$$P = \frac{k \times r \times t}{100} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующее:

Когда время не принимается въ расчетъ, то изъ (1) формулы видно, что

a) *Для опредѣленія процентовъ должно капиталъ раздѣлить на* 100 *и результатъ умножить на таксу.*

b) *Для опредѣленія капитала должно проценты раздѣлить на таксу и результатъ умножить на 100.*

c) *Для опредѣленія таксы должно проценты умножить на* 100 *и результатъ раздѣлить на капиталъ.*

Когда же въ расчетъ должно входить и время обращенія капитала, то изъ (1) формулы.

$$P = \frac{k \times r \times t}{100}$$

вывожу

$$\text{a) } k = \frac{100\,P}{r \times t}, \quad \text{b) } r = \frac{100\,P}{k \times t}, \quad \text{c) } t = \frac{100\,P}{k \times r}.$$

407. *Сложные проценты.*—Оставляя прежнее обозначеніе, мы знаемъ, что проценты съ капитала k, за одинъ годъ при таксѣ $r^0/_0$, будутъ равны $\frac{k \times r}{100}$. Но при расчетѣ по сложнымъ процентамъ, передавая капиталъ для обращенія на второй годъ, процентовъ отъ него отдѣлять не слѣдуетъ, но напротивъ ихъ должно обратить въ капиталъ, такъ что капиталъ поступающій на второй годъ будетъ

$$k + \frac{k \times r}{100},$$

откуда выводя k за скобку, какъ общій множитель, получимъ

$$k\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Этотъ множитель $1 + \frac{r}{100}$ выражаетъ собою то измѣненіе, которое происходитъ съ капиталомъ, по прошествіи одного года. Слѣдовательно, если бы нужно было опредѣлить, во что обратится капиталъ по прошествіи еще года т. е. 2-го года, должно величину капитала по прошествіи 1-го года опять умножить на $1 + \frac{r}{100}$ и получится $k\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ и т. д.

Такимъ образомъ капиталъ k поступившій въ обращеніе по сложнымъ процентамъ

къ концу 1-го года обратится въ $k\left(1 + \frac{r}{100}\right)$,

..... 2-го ....., ... $k\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) = k\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$

....., 3-го ..... $k\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2\left(1 + \frac{r}{100}\right) = k\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$

такъ что, если чрезъ k' обозначимъ тотъ капиталъ, въ который капиталъ k обратится чрезъ t лѣтъ, то

$$k' = k\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \ldots\ldots\ldots (1)$$

Вычисленія по этой формулѣ должно производить логариѳмами, имѣемъ

$$\log k' = \log k + t \log \left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Изъ формулы (1) легко получить

$$2)\ k = \frac{k'}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t},\quad 3)\ \frac{k'}{k} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t,\quad 4)\ \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \sqrt[t]{\frac{k'}{k}}$$

Правило учета векселей.

408. *Вексель* есть росписка, которую занимающій (*должникъ*) у кого нибудь деньги на извѣстное время даетъ тому у кого занимаетъ (*кредитору*), въ удостовѣреніе своевременной уплаты долга. Въ векселяхъ прописывается: срокъ уплаты и занятая сумма вмѣстѣ съ процентами причитающимися за все время пользованія занятымъ капиталомъ.

Но если должникъ пожелаетъ расчитаться съ кредиторомъ раньше срока означеннаго въ векселѣ, то понятно, что изъ вексельной суммы должно исключить проценты на занятый капиталъ за время отъ уплаты до предполагавшагося срока. Это дѣйствіе называется *учетомъ векселя* (дисконтированіемъ векселя).

Другими словами вопросъ предстоящій нашему рѣшенію заключается въ слѣдующемъ:

Положимъ, вексельная сумма есть m, такса $r\frac{0}{0}$ и вексель уплачивается за t времени до срока. Найти сумму подлежащую уплатѣ, которую назовемъ чрезъ k?

Но за время t, съ суммы k при таксѣ $r\frac{0}{0}$, процентовъ составится (§ 406) $\frac{k \times t \times r}{100}$, стало быть, если мы эти проценты прибавимъ къ суммѣ k, то должны получить вексельную сумму m; такимъ образомъ

$$m = k + \frac{k \times t \times r}{100} = k \left(1 + \frac{t \times r}{100}\right);$$

отсюда сумма подлежащая уплатѣ

$$k = \frac{m \times 100}{100 + t \times r}$$

По этой формулѣ рѣшаются всѣ вопросы по учетамъ.

Но въ дѣлахъ комерческихъ, учетъ принято вычислять иначе, хотя способъ употребляемый при этомъ неточенъ, потому что изъ вексельной суммы вычитаются проценты за все время до срока съ вексельной же суммы.

Примѣръ. — Вексель въ 1500 рублей на 3 мѣсяца, по 5 процентовъ на 100. Спрашивается какъ великъ учетъ если вексель будетъ уплоченъ тотчасъ же?

Расчетъ производятъ такъ. Искомый учетъ есть проценты съ 1500 рублей за 3 мѣсяца т. е. за $\frac{3}{12}$ года, слѣдовательно

$$\frac{1500}{100} \times 5 \times \frac{3}{12} = 18,25 \text{ руб.}$$

Такимъ образомъ, сумма подлежащая уплатѣ равна 1500—18,25=1481,75 руб.

Правило смѣшенія.

409. Задача I.—*Имѣемъ два слитка серебра; одинъ 84-й пробы вѣсомъ въ 6 фунтовъ, другой 72 пробы вѣсомъ въ 2 фунта. Спрашивается, когда оба слитка будутъ сплавлены, какой пробы получится серебро.* (*)

Каждый фунтъ слитка 84 пробы содержитъ 84 золотника чистаго серебра, а каждый фунтъ слитка 72 пробы содержитъ 72 золотника чистаго серебра; слѣдовательно количество чистаго серебра въ сплавѣ будетъ

$$(6 \times 84 + 2 \times 72)^{\text{зол}}$$

(*) Пробою называется число, показывающее сколько въ фунтѣ сплава содержится золотниковъ чистаго серебра. Такъ, въ фунтѣ серебра 84-й пробы чистаго серебра содерж. 84 золотника, а дополненіе къ нимъ до 96 зол. т. е. 12 зол. называется *лигатурою*. Во Франціи проба есть число граммовъ чистаго серебра въ 1 килограммѣ сплава, такъ проба 0,950 выражаетъ: что въ 1000 граммахъ, составляющихъ одинъ килограммъ сплава, чистаго серебра содержится 950 грам. и 50 грам. лигатуры.

Но, съ другой стороны, вѣсъ этаго сплава есть $(6 + 2)$ фунтовъ, поэтому, обозначивъ чрезъ x искомую пробу одна-го фунта сплава, она получится, если предъидущее коли-чество золотниковъ раздѣлимъ на $6 + 2$, т. е.

$$x = \frac{6 \times 84 + 72 \times 2}{6+2} = \frac{648}{8} = 81.$$

Слѣдовательно серебро сплава будетъ 81-й пробы.

Вообще, если сплавляютъ слитки серебра, или какого либо металла, вѣсъ которыхъ p, p' p'',..... имѣющихъ соот-вѣтственно пробы t, t' t'' .....; то проба сплава получится по формулѣ

$$x = \frac{pt + p't' + p''t'' + \ldots}{p + p' + p'' + \ldots}$$

401. Задача II.—*Имѣемъ два слитка серебра одинъ 84-й про-бы въ 6 фунтовъ, а другой 72-й пробы въ 2 фунта; спрашивает-ся сколько должно употребить каждаго слитка, чтобы состав-ить сплавъ серебра 81-й пробы.*

Каждый фунтъ 84-й пробы имѣетъ 3 золотниками чистаго серебра болѣе, чѣмъ фунтъ 81-й пробы, а каждый фунтъ 72-й пробы имѣетъ 9 золотниками чистаго серебра менѣе, чѣмъ фунтъ 81-й пробы.

Обозначивъ искомое количество для втораго слитка чрезъ x, а для перваго чрезъ y, будетъ

$$x \times 3 = y \times 9$$

отсюда

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{3}$$

Изъ этого видно, что общее число фунтовъ въ слиткахъ т. е. 8 фунтовъ должно раздѣлить на части пропорціональ-ныя числамъ $9 : 3$ (§ 404). Но $9 + 3 = 12$, слѣдовательно получится $\frac{8}{12}$ или $\frac{2}{3}$; тогда

$$x = \frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3} = 2.$$

$$y = \frac{2}{3} \times 9 = \frac{18}{3} = 6.$$

Такимъ образомъ оказывается, что для сплава 81й пробы должно употребить 6 фунтовъ перваго слитка и 2 фунта втораго.

Упражненія.

1°. 45 работниковъ совершили нѣкоторую работу въ 48 дней; во сколько дней ту же работу сдѣлаютъ другіе 78 работниковъ, если сила первыхъ относится къ силѣ послѣднихъ какъ 3 къ 5?

2°. 35 работниковъ должны употребить 4 дня, чтобы вывесть стѣну въ 15 метровъ длины, 4,50 метр. вышины и 0,75 метр. толщины. Сколько времени должны употребить 42 работника, чтобы вывести стѣну длиною въ 19 метровъ, вышиною въ 3 метра и шириною въ 1,20 метра?

3°. Раздѣлить землю, имѣющую поверхность въ 16720 акровъ на 3 участка такъ, чтобы 1-й участокъ былъ менѣе втораго во столько разъ во сколько 4 менѣе 5, а 2-й участокъ менѣе 3, во столько разъ во сколько 9 менѣе 36. Опредѣлить сколько десятинъ будетъ въ каждомъ участкѣ, и сколькими акрами первый участокъ будетъ менѣе третьяго?

4°. Чанъ имѣетъ двѣ трубы, наполняющія его водою и два спускныхъ крана, чрезъ которые онъ осушается. 1-я труба можетъ наполнить чанъ въ $^3/_4$ часа, а 2-я труба въ 25 минутъ. 1-й кранъ будучи открытъ, осушитъ чанъ въ 36 минутъ, а 2-й кранъ въ 31 минуту. Опредѣлить, во сколько времени чанъ наполнится, если будутъ открыты какъ обѣ трубы, такъ и оба крана?

5°. Двѣ артели работниковъ получили за работу 1672 франка 25 сантимовъ. Первая артель состояла изъ 31 работника, работавшихъ $5^1/_2$ дней, по 6 часовъ въ день; а вторая изъ 23 работниковъ, работавшихъ $12^1/_4$ дней, по 8 часовъ въ день. Сколько каждая артель должна получить денегъ?

6°. Вычислить, во что обратится капиталъ 5000 рублей, отданный по таксѣ 4% на $11^1/_3$ лѣтъ. А такъ какъ проценты капитализуются только по истеченіи цѣлаго года, то слѣдовательно начальный капиталъ 11 лѣтъ возрасталъ по сложнымъ процентамъ, а $^1/_3$ года по простымъ.

7⁰. Вычислить въ какое время капиталъ 4867 франковъ можетъ удвоиться при таксѣ 5%, по сложнымъ процентамъ.

8⁰. Обладатель векселя въ 3664 рубля нуждается въ деньгахъ и предлагаетъ сдѣлать учетъ по 6%, сколько онъ получитъ денегъ?

9⁰. На 26723 рублей сдѣланъ учетъ 1620 руб. 20 коп. При скольких̀ъ процентахъ производится учетъ?

10⁰. Требуется составить смѣсь чаю въ 3 пуда изъ двухъ сортовъ, такъ чтобы фунтъ стоилъ 4 рубля. Цѣна 1-го сорта чаю 9 рублей, а втораго 2 р. 40 к. Узнать по скольку должно взять для смѣси отъ каждаго сорта чаю?

ос. библиот. б-ка в Ленинграде

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

КНИГА ПЕРВАЯ: *о четырехъ дѣйствіяхъ.*

Глава I. — Нумерація 1
— II. — Сложеніе и Вычитаніе 9
— III. — Умноженіе 17
— IV. — Дѣленіе 24

КНИГА ВТОРАЯ: *начальныя свойства чиселъ.*

Глава I. — Свойства относящіяся къ четыремъ дѣйствіямъ 40
— II. — Дѣлимость 52
— III. — Теоріи общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго числа 64
— IV. — Теорія первоначальныхъ чиселъ 76

КНИГА ТРЕТЬЯ: *дроби и числа десятичныя.*

Глава I. — Свойства дробей 95
— II. — Дѣйствія надъ числами цѣлыми и дробными . . 109
— III. — Десятичныя числа 128

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ: *несоизмѣримыя числа.*

Глава I. — Теорія квадратныхъ корней 152
— II. — Теорія кубичныхъ корней 169
— III. — Теорія несоизмѣримыхъ чиселъ 182
— IV. — Теорія десятичныхъ приближеній 205

КНИГА ПЯТАЯ: *пропорціи, прогрессіи и логариѳмы.*

Глава I. — Теорія пропорцій 232
— II. — Теорія прогрессій 249
— III. — Теорія логариѳмовъ 266

КНИГА ШЕСТАЯ: *именованныя числа и приложенія ариѳметики къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ.*

Глава I. — Объ именованныхъ числахъ 289
— II. — Приложенія ариѳметики 308

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

КНИГА ПЕРВАЯ: *о четырехъ дѣйствіяхъ.*

Глава I. — Нумерація 1
— II. — Сложеніе и Вычитаніе 9
— III. — Умноженіе 17
— IV. — Дѣленіе 24

КНИГА ВТОРАЯ: *начальныя свойства чиселъ.*

Глава I. — Свойства относящіяся къ четыремъ дѣйствіямъ 40
— II. — Дѣлимость 52
— III. — Теорія общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго числа 64
— IV. — Теорія первоначальныхъ чиселъ 76

КНИГА ТРЕТЬЯ: *дроби и числа десятичныя.*

Глава I. — Свойства дробей 95
— II. — Дѣйствія надъ числами цѣлыми и дробными . . 109
— III. — Десятичныя числа 128

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ: *несоизмѣримыя числа.*

Глава I. — Теорія квадратныхъ корней 152
— II. — Теорія кубичныхъ корней 169
— III. — Теорія несоизмѣримыхъ чиселъ 182
— IV. — Теорія десятичныхъ приближеній 205

КНИГА ПЯТАЯ: *пропорціи, прогрессіи и логариѳмы.*

Глава I. — Теорія пропорцій 232
— II. — Теорія прогрессій 249
— III. — Теорія логариѳмовъ 266

КНИГА ШЕСТАЯ: *именованныя числа и приложенія ариѳметики къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ.*

Глава I. — Объ именованныхъ числахъ 289
— II. — Приложенія ариѳметики 308

2020037695